Markowitz投资组合模型下最优组合权重的显著性检验

张永正　长 青　孙 振

（内蒙古工业大学管理学院　呼和浩特　010051）

【摘要】鉴于Markowitz投资组合模型与线性回归模型之间的联系，我们可以通过线性回归方法估计最优组合权重，并且检验最优组合权重的显著性。Markowitz投资组合权重是最优的，但并不保证该证券能够有效分散组合的非系统性风险。线性回归模型的显著性检验告诉我们，只有最优组合权重通过了显著性检验的证券才对分散组合的非系统性风险有明显的贡献。在实际运用中，以计算最小方差点处的最优组合权重为例，最小二乘回归的结果与直接使用非线性规划求解的结果相同。通过显著性检验还可以把不显著的证券从组合中去掉，建立更加简洁有效的投资组合，从而降低管理成本。

【关键词】投资组合模型　线性回归模型　显著性检验　非系统性风险

一、关于证券投资组合的文献综述

证券投资组合是指投资者对各种证券资产进行选择从而形成的投资组合，其目的在于分散个别风险或非系统性风险，从而实现投资效用的最大化。

1952年，诺贝尔经济学奖得主Harry Markowitz发表了《证券组合选择》一文，在此文中他建立了最优投资组合的均值—方差模型，即寻求在一定的期望收益水平下使风险达到最小的投资组合，或在一定的风险水平下使平均收益达到最大的投资组合。他从理论上给出了资产组合选择的标准。

证券投资组合理论是在资本市场上进行投资的重要理论，因此深入研究投资组合的理论和方法就显得十分必要。张立山、张晓红用线性规划单纯形法解决证券投资组合的优化问题。万中等人构造了外点惩罚函数，采用Frank-Wolf算法解决这一问题。但随着证券种类以及数目的不断增多，当线性规划模型的决策变量数目增加时，就增加了计算工作量，最优投资比例的确定变得非常困难。

徐绪松、陈彦斌用模拟退火法求解基于绝对离差的证券投资组合模型。杨利、李玉娟提出了一种改进的模拟退火法，应用惩罚函数法将Markowitz投资组合模型转化成无约束的优化问题，并对基本的模拟退火法的关键过程和参数进行了优化，解决了模拟退火法初始温度和解的产生机制问题，达到了速度和精度的平衡，提高了该算法的效率。由于理论最小迭代次数无法确定，因此存在着计算效率偏低的问题，仍需要进一步研究。

从Markowitz的投资组合模型开始，研究资产组合有效性的问题对于投资实务具有重要意义，理论研究者在这方面做了大量检验工作。给定一个特定的投资组合p，其组成部分或投资组合比例是已知的，传统上，把检验资产组合的有效性问

况的信息披露，以满足相关信息使用者的信息诉求。我国实行收付实现制，无法对非现金交易事项类信息进行记录和披露。西方国家在政府会计中引入权责发生制的实践经验表明，权责发生制比收付实现制的核算范围更广，能够更加全面、客观地提供有关财务状况和财务业绩信息，在绩效管理和风险防范方面更具有优越性，我国在以后的政府会计改革中可适当借鉴。

第三，继续保持预算资金的信息披露，现有的政府会计信息可以使利益相关者全面了解预算收支情况。

第四，为提高政府部门成本费用核算水平，提升政府管理绩效，各级政府应加强业绩和成本信息的披露。

第五，利益相关者获取我国政府会计信息的途径比较狭窄，为此应改进政府会计信息的披露途径，提高信息披露的透明度。

我国的政府会计信息披露体系需要改革与完善，以期能让政府会计制度同我国社会主义市场经济的发展相协调，从而适应我国公共财政和预算管理制度的改革以及政府职能的转换，这也顺应了我国政府会计与国际政府会计发展相协调的需要。

主要参考文献

1. 葛家澍，叶丰滢，陈秧秧，徐跃.如何评价美国 FASB 的财务会计概念框架.会计研究，2005；4

2. 么冬梅，邵铁柱.我国政府会计信息披露问题研究.商业研究，2006；8

3. 李建发，张曾莲.基于财务视角的政府绩效报告的构建.会计研究，2009；6

4. 张琦，张娟.政府会计改革：问题、对策与建议——政府会计改革研讨会综述.会计研究，2009；10

5. 赵西卜，王建英，王彦，曹越.政府会计信息有用性及需求情况调查报告.会计研究，2010；8

题转化为检验资产定价模型的有效性，以检验Sharpe-Lintner CAPM的形式进行，在经典统计学的假设检验框架下，在某一显著性水平下接受或拒绝投资组合的有效性。Gibbons首先在多元统计框架下检验资产组合的有效性。在存在无风险资产的情况下，Gibbons、Ross & Shanken（1989）提供了有效的检验方法，从而解决了资产组合有效性精确检验的问题。在不存在无风险资产的情况下，Zhou（1991）应用特征值检验来检验资产组合的有效性。Harvey和Zhou 使用贝叶斯推断来检验投资组合的有效性。

尽管目前已有许多方法被提出用来估计投资组合的最优权重，但这些方法大多非常复杂。尤其是当资产组合中涉及的证券数目非常多的时候，计算量会大幅增加，估计精度迅速下降。如果能将投资组合问题转化为线性回归问题，并借助技术上成熟的最小二乘法估计最优组合权重，计算工作量将大幅下降，估计精度大幅提高。

衡量投资组合是否有效的关键在于是否能够有效分散非系统性风险，这取决于各组成部分在组合中的作用是否有效或显著。把检验资产组合的有效性问题转化为检验资产定价模型的有效性，只能检验组合整体的有效性或市场的有效性，对于单个证券在投资组合中是否有效不能给予明确的回答。即使一个组合在整体上是有效的，也并不能保证组合中每一只证券在分散非系统性风险方面都有效，所以对于组合中的单个证券的有效性检验仍十分必要。

根据分散化原理，要想尽可能多地分散非系统性风险，组合中包含的证券的数目就要足够多。但是，组合包含的证券数目太多，管理成本就会增大。而且，组合中的一些证券对分散非系统性风险的贡献可能并不大，需要把它们检验出来，从模型中剔除，建立一个精简、高效率的投资组合，从而降低管理成本，这对投资实务具有重要的现实价值。

本文主要解决两个方面的问题：首先揭示Markowitz投资组合模型与线性回归模型之间的联系，通过线性回归方法估计最优组合权重；其次，将回归分析中的参数显著性检验方法应用到最优组合权重的有效性检验中，因为只有最优组合权重通过了显著性检验的证券才对分散组合的非系统性风险有明显的贡献。

二、Markowitz投资组合模型与线性回归模型

投资者是利益驱动和风险厌恶的，总是期望收益率越高越好，而方差（风险）越小越好，所以投资者主要关心投资的收益率和方差：

$$r_p=\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_j \tag{1}$$

$$\sigma_p^2=\sum_{j=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\beta_j\sigma_{jl}\beta_l=VAR(r_p)=E[r_p-E(r_p)]^2$$
$$=E[\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_j-E(r_p)]^2 \tag{2}$$

其中，K是证券组合的个数；r_i是第i只证券的收益率；$E(r_i)$是第i只证券的期望收益率；β_i是第i只证券在投资组合中的权重；σ_{ij}是第i与第j只证券收益率的协方差矩阵；$E(r_p)$和σ_p^2分别是投资组合的期望收益率和方差。

我们可以得到每一只证券收益率的n个样本观测值，如第j只证券在n个样本点上的收益率为$r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{nj}$，则第j只证券的平均收益率为：

$$\bar{r}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}r_{ij}$$

投资组合p在第i个样本点上的收益率是：

$$r_{ip}=\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_{ij}$$

投资组合p的平均收益率是：

$$\bar{r}_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ip}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_{ij}=\sum_{j=1}^{K}\beta_j\bar{r}_j \tag{3}$$

投资组合p的样本方差是：

$$\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_{ip}-\bar{r}_p)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_{ij}-\bar{r}_p)^2 \tag{4}$$

Markowitz投资组合模型以收益率的期望值来衡量未来收益率的水平，以收益率的方差来衡量收益率的不确定性，证券组合的特征完全由期望收益率和收益率的方差来描述。其模型如下：

$$\min\sigma_p^2=\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}\beta_i\sigma_{ij}\beta_j$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{K}\beta_j E(r_j)=E(r_p)\\ \sum_{j=1}^{K}\beta_j=1\end{cases} \tag{5}$$

我们将（5）式中的收益率用其相应的样本收益率和方差进行替换，可得：

$$\min\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{K}\beta_j r_{ij}-\bar{r}_p)^2$$

$$s.t.\left\{\sum_{j=1}^{K}\beta_j=1\right.$$

进一步变换，可得：

$$\min\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\beta_1 r_{i1}+\beta_2 r_{i2}+\cdots+\beta_K r_{iK}-\bar{r}_p)^2$$
$$s.t.\quad \beta_K=1-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_{K-1}$$

将约束条件代入目标函数，可得：

$$\min\sigma_p^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[r_{iK}-\bar{r}_p-\sum_{j=1}^{K-1}\beta_j(r_{iK}-r_{ij})]^2$$

可改写为：

$$\min\quad(n-1)\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}[r_{iK}-\bar{r}_p-\sum_{j=1}^{K-1}\beta_j(r_{iK}-r_{ij})]^2 \tag{6}$$

与多元线性回归模型的最小二乘准则对比：

$$\min\quad RSS=\sum_{i=1}^{n}[Y_i-\sum_{j=1}^{K-1}(\beta_j X_{ij})]^2$$

可得出（6）式的最优权重$\beta_j(j=1,2,\cdots,K-1)$，其可以看作以$r_K-\bar{r}_p$为被解释变量，以$r_K-r_j(j=1,2,\cdots,K-1)$作为解释变量的一个不含截距项的多元线性回归模型的回归系数的参数估计值。

表1　　样本数据

sample	r1	r2	r3	r4	sample	r1	r2	r3	r4
1	−0.176 04	−0.040 43	−0.114 25	0.018 64	13	−0.109	0.084 12	−0.044 01	0.013 8
2	−0.274 71	−0.048 23	−0.094 11	0.027 24	14	−0.084 34	0.091 84	−0.020 24	0.064 98
3	−0.284 45	−0.043 49	−0.090 64	0.054 88	15	−0.059 37	0.129 9	0.026 35	0.097 85
4	−0.309 51	−0.053 86	−0.069 29	0.050 62	16	0.038 81	0.171 96	0.062 64	0.133 87
5	−0.317 52	−0.043 28	−0.099 84	0.064 47	17	0.029 98	0.153 55	0.066 74	0.124 81
6	−0.391 28	−0.037 74	−0.144 52	0.026 43	18	0.081 84	0.175 05	0.148 63	0.121 04
7	−0.350 52	−0.015 27	−0.206 43	0.053 07	19	0.073 12	0.141 13	0.135 38	0.122 4
8	−0.287 87	0.007 62	−0.195 82	−0.008 83	20	0.025 14	0.090 43	0.022 69	0.081 74
9	−0.235 8	0.013 45	−0.072 08	−0.024 72					
10	−0.165 08	0.034 75	−0.060 96	−0.024 65	均值	−0.154 473 5	0.045 182	−0.044 149 5	0.048 817 5
11	−0.157 84	0.051 79	−0.063 16	−0.000 49	标准差	0.033 607	0.017 88	0.021 638	0.011 721
12	−0.135 03	0.040 35	−0.070 07	−0.020 8	均值/标准差	−4.596 51	2.526 972	−2.040 36	4.165 102

$$r_{iK}-\bar{r}_p=\beta_1(r_{iK}-r_{i1})+\beta_2(r_{iK}-r_{i2})+\cdots+\beta_{K-1}(r_{iK}-r_{i,K-1})+\mu_i \quad (7)$$

由于回归模型设定的特殊性，作为被解释变量的第K只证券必须存在于组合中。但在实际中，共有K只证券，选谁作为第K只证券，似乎并不唯一。而我们希望第K只证券应一定存在于组合中，所以通常取证券收益率的样本均值与方差之比最大的作为第K只证券。

特别地，在最小方差点处，$\bar{r}_p$未知，也作为一个需要估计的参数，此时可以令$\beta_0=\bar{r}_p$，得到含截距项的多元线性回归模型：

$$r_{iK}=\beta_0+\beta_1(r_{iK}-r_{i1})+\beta_2(r_{iK}-r_{i2})+\cdots+\beta_{K-1}(r_{iK}-r_{i,K-1})+\mu_i \quad (8)$$

其中，μ_i为随机误差项，满足回归模型基本假设，是具有零均值、同方差、无序列相关，且服从正态分布的随机变量。

前面的推导过程阐述了Markowitz投资组合模型与多元线性回归模型的联系。事实上，我们也可以这样来理解Markowitz投资组合模型，即寻找一组最优的投资组合权重$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_K$，使得其组合的收益率尽可能接近投资者的预期收益率，有如下表达式：

$$\bar{r}_p=\beta_1 r_{i1}+\beta_2 r_{i2}+\cdots+\beta_K r_{iK}+\mu_i$$

将约束条件$\beta_K=1-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_{K-1}$代入上式，整理后可得：

$$r_{iK}-\bar{r}_p=\beta_1(r_{iK}-r_{i1})+\beta_2(r_{iK}-r_{i2})+\cdots+\beta_{K-1}(r_{iK}-r_{i,K-1})+\mu_i$$

这与(7)式相同，若假设$\bar{r}_p$未知，也可得到(8)式。

这样，我们就把一个Markowitz投资组合问题转化为一个简单的多元线性回归问题，在多元线性回归框架下求解投资组合问题，并且可以对回归模型的最优组合权重作统计检验。

三、实例分析

1. 样本数据。为便于读者对本文的相关结果进行验证，所以本文仅选用4只证券，20个样本数据，样本数据见表1，样本数据的协方差矩阵见表2。

2. 有效前沿上的投资组合。我们在此仅对最小方差点处的投资组合进行分析。首先我们采用GAMS23.4软件，利用样本的均值和协方差信息建立Markowitz模型并求解，在最小方差点处求解出最优组合权重，以及收益与风险。

表2　　样本数据的协方差矩阵

	r1	r2	r3	r4
r1	0.022 588 161	0.011 142 213	0.013 277 285	0.004 828 615
r2	0.011 142 213	0.006 393 821	0.006 580 705	0.002 624 485
r3	0.013 277 285	0.006 580 705	0.009 364 144	0.003 631 969
r4	0.004 828 615	0.002 624 485	0.003 631 969	0.002 747 455

GAMS程序如下：

```
set i  /r1,r2,r3,r4/;
alias (i,j);
table cov(i,j)
        r1            r2            r3            r4
r1   0.022588161   0.011142213   0.013277285   0.004828615
r2   0.011142213   0.006393821   0.006580705   0.002624485
r3   0.013277285   0.006580705   0.009364144   0.003631969
r4   0.004828615   0.002624485   0.003631969   0.002747455
;
parameter r(i) /r1  -0.1544735
r2  0.045182
r3  -0.0441495
r4  0.0488175/;
variable b(i);
variable rp,sigm2,sigm;
equation obj,eq1,eq2,eq3;
obj.. sigm2=e=sum(i,sum(j,b(i)*cov(i,j)*b(j)));
eq1.. sum(i,b(i))=e=1;
eq2.. sum(i,r(i)*b(i))=e=rp;
eq3.. sigm=e=sigm2**0.5;
model mymod /all/;
*rp.fx=0.2;
solve mymod minimizing sigm2 using nlp;
```

接下来，选用均值与标准差之比最大的r_4作为被解释变量，以r_4-r_1，r_4-r_2，r_4-r_3作为解释变量，用Eviews6.0软件进行含截距项的最小二乘回归，得到参数估计结果如表3。

表3　第一次回归的参数估计结果

解释变量	回归系数	标准误差	T统计量	P值
截距项	0.139 108	0.030 355	4.582 698	0.000 3
r4-r1	-0.513 902	0.206 02	-2.494 434	0.023 9
r4-r2	0.785 265	0.290 742	2.700 898	0.015 7
r4-r3	0.121 836	0.296 933	0.410 313	0.687

注：回归标准误差为0.044 79，AIC为-3.197 0。

用Markowitz模型在GAMS下的非线性规划求解与Eviews下的最小二乘求解几乎得到了相同的结果：在最小方差点处，第一只证券的最优权重为-0.513 9；第二只证券的权重为0.785 3；第三只证券的权重为0.128 4；第四只证券的权重为0.600 2。该组合可以获得13.91%的期望收益，但要承担0.044 79的风险。

两种求解过程的差别在于：①Markowitz模型使用的是样本的均值与协方差信息，而回归方法直接使用样本的信息。②Markowitz模型使用非线性规划求解，求解结果受迭代精度的影响，存在一定的误差；回归方法是线性的，所以求解精度较高。③两种方法得到的投资组合的方差的估计值在小样本下是有差异的，在大样本下是一致的。④最重要的是，回归方法能够给出每一只证券的权重在投资组合中是否显著，也就是说该证券对于分散组合非系统性风险是否具有显著的贡献提供了统计依据。

从表3中我们可以看到，第三只证券回归系数的P值为0.687，大于通常的显著性水平0.05，表明第三只证券的权重不显著，也就是说该证券对于分散整个组合的非系统性风险没有起到显著的贡献，应从组合中剔除。

我们去掉第三只证券，再次作最小二乘回归，得到参数估计结果如表4所示。

表4　第二次回归的参数估计结果

解释变量	回归系数	标准误差	T统计量	P值
截距项	0.138 223	0.029 528	4.681 017	0.000 2
r4-r1	-0.453 774	0.141 223	-3.213 179	0.005 1
r4-r2	0.781 983	0.283 434	2.758 96	0.013 4

注：回归标准误差为0.043 68，AIC为-3.286 5。

最小二乘回归结果表明：在最小方差点处，第一只证券的最优权重为-0.453 8；第二只证券的权重为0.782 0；第三只证券的权重为0；第四只证券的权重为0.671 8。该组合可以获得13.82%的期望收益，但要承担0.043 68的风险。第一、二只证券的权重都很显著，对于第四只证券，我们在选择被解释变量时已经保证它将以非常大的可能性存在于组合中，但我们仍然可以作如下的受约束线性回归假设检验：

$$1-\beta_1-\beta_2=0$$

检验统计量为：

$$\frac{(RSS_R-RSS_U)/(K_U-K_R)}{RSS_U/(n-K_U-1)}\sim F(K_U-K_R,n-K_U-1)$$

其中，RSS_U、RSS_R分别表示无约束与受约束回归下的残差平方和；n表示样本容量；K_U、K_R分别表示无约束与受约束回归模型中的解释变量个数。

线性约束的检验结果为13.15，P值为0.002 1，小于通常的显著性水平0.05，所以第四只证券的权重β_4显著，对于分散投资组合的非系统性风险具有显著的贡献。

去掉第三只证券后，第二次回归的标准误差和AIC值均下降了，因此，与原组合相比，新组合虽然包含的证券数目减少了，但对于分散投资组合的非系统风险同样有效。

四、结论

通过推导，本文揭示了Markowitz投资组合模型与线性回归模型之间的联系，由此我们可以通过线性回归方法得到最优组合权重，并且使最优组合权重的显著性检验成为可能。尽管Markowitz模型的组合权重是最优的，但并不一定都能够显著分散组合的非系统性风险。

根据线性回归模型，只有最优权重通过了显著性检验的证券才能对分散模型的非系统性风险有明显的贡献。组合中有些证券对分散非系统性风险的贡献可能并不大，我们可以把它们检验出来，从模型中剔除，使得组合不一定必须包含过多的证券，仍然可以有效分散组合的非系统性风险，从而使金融机构管理投资组合的成本下降。

【注】本文为教育部新世纪优秀人才支持计划项目“企业投资项目绩效评价研究”(项目编号：NCET-08-0869)、内蒙古工业大学校基金“基于VaR的证券投资组合的选择与有效前沿研究”(项目编号：X200429)的阶段性研究成果。

主要参考文献

1. Harry Markowitz. Portfolio Selection. The Journal of Finance，1952；7

2. 张立山，张晓红.线性规划在风险资产投资组合中的应用.职业时空，2008；4

3. 万中等.证券投资组合问题的新模型和算法.湖南大学学报(自然科学版)，2008；10

4. 徐绪松，陈彦斌.绝对离差证券组合投资模型及其模拟退火算法.管理科学学报，2002；5

5. 杨利，李玉娟.基于改进模拟退火法的证券投资组合优化.消费导刊，2007；7

6. Gibbons，M. R..Multivariate Tests of Financial Models: A newapproach.Journal of financial economics 1982；10

7. Gibbons，M. R.，S. A. Ross，J. Shanken.A Test of the Efficiencyof a Given Portfolio. Econometrica 1989；7

8. Guofu Zhou.Small Sample Tests of Portfolio Efficiency. Journal of Financial Economics，1991；3

9. Harvey，C. R. G. Zhou. Bayesian Inference in Asset Pricing Tests.Journal of Financial Economics，1990；6