

# 奔福德定律在审计领域的应用

王福胜(博士生导师) 李勋 孙逊

(哈尔滨工业大学管理学院 哈尔滨 150001 美国友邦保险有限公司上海分公司 上海 200002

中铁大桥局集团有限公司 武汉 430050)

**【摘要】** 本文介绍了奔福德定律的理论内涵及其在审计中应用的理论和实践成果,探讨了在审计实践中应用奔福德定律的条件及应注意的问题。

**【关键词】** 奔福德定律 审计 财务舞弊

## 一、奔福德定律的内涵

奔福德定律是一个有趣的数学定律,该定律揭示了在满足特定条件的情况下,大量统计数据中阿拉伯数字1~9出现在数据首位的概率的分布规律。

1. 奔福德定律的推演。美国数学家、天文学家塞蒙·纽卡姆于1881年经过对大量随机数据的统计分析,发现这些数据都符合这样的规律:以“1”为第一位数的随机数要比以“2”为第一位数的随机数出现的概率大,而以“2”为第一位数的随机数要比以“3”为第一位数的随机数出现的概率大,以此类推。

到了1938年,美国通用电器的物理学家弗瑞克·奔福德又独立发现了这一现象并得出了和塞蒙·纽卡姆一样的结论。他收集了很多数据来验证自己的假说,这些数据包含了尽可能多的种类和范围,数据的收集和整理花费了7年的时间。他验证了总数为20 229个的20组数字,其中包括篮球比赛的数字、河流的长度、湖泊的面积、各城市人口分布数字、在某一本杂志里出现的所有数字等。弗瑞克·奔福德推导了奔福德定律的数学表达式,即数字的第一位上各个非0数字出现的概率,表达如下:

$$\frac{\int_D^{D+1} P(x)dx}{\int_1^{10} P(x)dx} = \lg\left(1 + \frac{1}{D}\right)$$

其中:D=1,2,3,⋯,9;P代表概率。

根据上式,数字第一位上出现“1”的概率大约为30%,而出现“9”的概率仅为4.6%。把D=1,2,3,⋯,9分别代入上式,所得结果如下表所示:

数字第一位上出现 1~9的概率

D	P <sub>D</sub>	D	P <sub>D</sub>
1	0.301 030	6	0.066 947
2	0.176 091	7	0.057 992
3	0.124 939	8	0.051 153
4	0.096 910	9	0.045 757
5	0.079 181		

将这一分布规律用图表示会更加清晰,见图1。

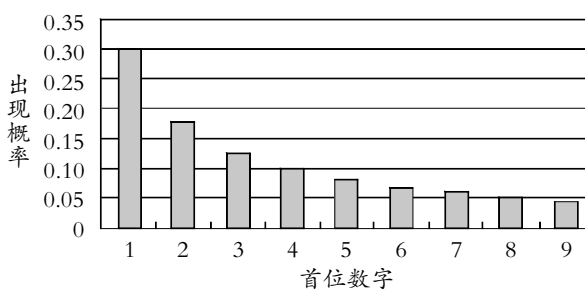


图1 奔福德定律概率分布

1996年美国学者Hill从理论上对奔福德定律做出了恰当的解释,并进行了严谨的数学证明。因其证明过程比较复杂,也不是本文探讨的重点,故不赘述。

2. 奔福德定律的扩展。后人又对奔福德定律做了大量的扩展研究,主要包括:

(1)其他位置上数字的分布规律。Hill指出,数字第二位上出现1~9的概率也是降序排列的,但其依次下降的幅度远远小于第一位数字。进而又有人继续深入研究,从第二位扩展到第三位、第四位。Nigrini通过研究给出了1~9中的每个数在数字的第一位至第四位上出现的概率的数表,通过该数表可以查出数字1~9在随机数第一位至第四位上出现的概率。

(2)数字分布的条件概率。有人研究了将数字第一位和第二位上出现1~9的概率联系起来考虑的情况,即条件概率。这是因为人们发现,各个位置上数字出现的概率不是相互独立的。

(3)度量单位变化的情况。数学家Pinkham的研究证明了奔福德定律不受度量单位的影响。他指出如果某一系列数字符合奔福德定律,并且这些数字符合持续增长的规律,那么无论它们使用什么度量单位,都依然遵循奔福德定律。这一发现很好地解释了为什么不同国家、不同币种的财务数据都遵循奔福德定律。另外一个有趣的现象是,一组符合奔福德定律的数字,它们的倒数依然符合奔福德定律。

(4)数字进制变化的情况。人们还发现奔福德定律在数字的进制改变的情况下依然有效。比如从人们最常用的10进制

改为12进制、6进制、5进制直至2进制,数字的首位数上依然是“1”出现的频率最高,当然进制不同时,所对应的各个数字在首位数上出现的概率也会有所变化。

## 二、奔福德定律在审计领域应用的成果

经济学家Varian(1972)指出,奔福德定律可以用来检验社会科学研究成果的可靠性和实用性。虽然能够用奔福德定律进行数值分析的数据受到一定条件的限制,但大量研究表明,会计、统计、税收、金融以及证券市场的各种数据符合奔福德定律。20世纪80年代,有人开始关注这一定律在财务领域的应用。

Carshaw(1988)首次把奔福德定律应用到会计领域,他提出了一个有趣的假设:当公司的净利润刚好低于心理预期边界时,管理者会倾向于想办法让这些数字刚好“上线”,因为他们都想报告出更高的收入数据来。比如数字19 536,管理者会倾向于想办法让它大于20 000。这样一来,数字的第二位上出现“0”的概率要远远大于奔福德定律所预测的结果,而第二位上出现“9”的概率要远远小于奔福德定律所预测的结果。Carshaw通过实证研究验证了这一假设,Thomas于1989年在美国的一些公司的财务数据中发现了同样的现象。

Nigrini(1996)首先把奔福德定律系统、广泛地应用到舞弊审计领域。Nigrini收集了大量的财务数据,经反复求证得出:如果样本范围足够大,真实的财务数据将会符合奔福德定律。当人们编造数据时,无论是否出于舞弊的目的,这些数据极少符合奔福德定律,人们很少能够做到像真的一样“随机”。一般情况下,舞弊数据和随意编写的数据很少是以数字“1”开头的,不符合奔福德定律的分布,在存在造假的会计数据里,各个数字在首位数上出现的概率是趋于平均的,大约每个都是10%左右。Nigrini开发了对财务数据进行奔福德定律测试的计算机软件,这一软件在实际应用中取得了相当好的效果。

Nigrini将这种舞弊审计的技术方法称为数值分析技术。这一技术被成功地应用到对美国旅游度假公司的财务审计中,公司的审计经理使用这一数值分析技术发现公司卫生保健部门经理的财务账目存在问题,在测试这些数据的前两位是否符合奔福德定律分布时发现了13张金额在6 500~6 599美元之间的伪造支票,审计人员采用这种数值分析技术发现了总额大约为100万美元的财务舞弊数据。华尔街日报曾经报道过Nigrini设计的方法的应用:位于纽约市布鲁克林区的律师事务所在处理七家公司有关财务舞弊的案件时使用了Nigrini设计的程序,其成功地发现了这七家公司均存在着财务舞弊行为。

在审查纳税舞弊时,奔福德定律也发挥了很大的作用。Nigrini被邀请参与了几个国家的税收审查,他设计的软件甚至还被用来审查比尔·克林顿的纳税情况。

由于这些案例的成功,从而奔福德定律在美国和欧洲国家引起了广泛的关注,同时也得到了许多集团企业、政府部门、上市公司、专业机构以及世界著名的审计师事务所的重视。

## 三、奔福德定律在财务领域的适用性

并不是所有的数据样本都符合奔福德定律。研究表明,能够用奔福德定律进行数值分析的数据应符合以下条件:①数值既不是完全随机的,也不能过度集中;②数值不能有上下限,如百分比、年龄、人的身高、田径比赛成绩、邮件的邮资等有限制的数据一般不符合奔福德定律;③数值在一个很广的范围内连续变动,不存在间断点或间断区间;④数字没被特别赋值,如电话号码、证件号码、股票代码等按一定编码规则形成的数字一般不符合奔福德定律;⑤数值的形成受多种因素的影响,是多种因素综合作用的结果,如城镇的人口数量。

Raimi和Boyle(1994)曾指出,来源不同的数字被混合起来或者进行加、减、乘、除的运算之后,往往符合奔福德定律。这很好地解释了为什么很多财务数据符合奔福德定律。另外,账户中所记载的交易次数也很重要,因为数据的样本量越大,分析的结果就越精确。一些受人因素限制较多的财务数据往往不符合奔福德定律,比如支票金额、商品和服务价格、ATM取款数额等通常都不符合奔福德定律。

## 四、奔福德定律在审计领域的应用

1. 奔福德定律与现有舞弊侦查方法的关系。现有的舞弊侦查方法主要有分析性复核、交易实质分析法、期后事项分析法、税项分析法、资产质量分析法、奇异分析法等。

分析性复核又称为“分析性测试”或“分析审计”、“比较审计”,是审计人员在审计实务中常用的技术方法。分析性复核又可分为简易比较法、比率分析法等,根据相关指标的计算、比较、分析,可以给审计人员相应的启示。分析性复核因其特有的优点而越来越受到审计界的重视。1980年颁布的《国际审计指南》将分析性复核确定为审计计划阶段和报告阶段必用的测试方法。我国从2004年2月1日起施行的《审计机关分析性复核准则》中具体规范了分析性复核的使用。

分析性复核有很多优点,概括地说就是降低审计成本、提高审计效率、保证审计质量。分析性复核利用企业信息之间的内在关系来判断数据的合理性,利用审计人员的经验和以前所确定的合理标准,对照分析被审计单位提供的资料和信息,从中发现异常的变动、不合理的趋势或比例,以此作为控制审计风险的要点,这对降低审计风险往往有事半功倍的效果,并能节约时间和发现详细抽样技术所不能发现的异常现象。同时,分析性复核可以促使审计人员充分发挥其创造力,并充分利用现有的计算机技术。

奇异分析法特别关注财务资料中奇异的数字、时间、地点、交易以及例外的和不合常理的情况。

对比来看,奔福德定律与上述舞弊侦查方法中的分析性复核和奇异分析法的应用有异曲同工之处。

从应用环节和特点来看,奔福德定律的应用应该归入分析性复核当中。将奔福德定律应用于审计领域,虽然从具体方法上看是一种创新,但从理论体系来看并没有脱离分析性复核的方法体系,只不过它是利用了数学上新的统计工具,发展出了一种新的数值分析技术,分析的仍然是数据之间的内在逻辑关系。当然,它和以往分析性复核的分析角度不同,现

有的分析性复核多从财务数据的内在勾稽关系和财务上的逻辑合理性出发,而奔福德定律的数值分析技术是从统计学的角度检测鲜为人知的数字分布的内在数学规律。相对于传统方法而言,这种全新的方法是一种很好的补充,这也给财务舞弊者的造假增加了新的困难。所以说,奔福德定律是对现有的分析性复核的补充和完善。

2. 奔福德定律在我国审计领域应用的可行性和必要性。我国《审计署2003至2007年审计工作发展规划》提出:大力推广先进审计技术方法,积极探索信息化环境下新的审计方式,提高审计工作效率和质量。可见,不断丰富和发展的现代审计理论及方法已成为审计界关注的焦点。

从可行性角度看,大部分财务数据符合奔福德定律所揭示的分布规律,这是奔福德定律在审计领域应用的理论基础。国外许多研究成果和实践也验证了奔福德定律在审计领域应用的可行性。审计是一项技术性很强的工作,从技术层面来看,我国的审计与国外的审计使用的技术方法没有太大的差别,所以在我国的审计实践中同样可以应用奔福德定律,同时计算机审计的普及为奔福德定律的应用创造了条件。从效率层面来看,应用奔福德定律耗时较短,只要熟悉计算机操作,审计人员一般只需几分钟甚至几秒钟的时间就可以得出检验结果,这个检验结果同样可以打印输出到审计工作底稿上,附在相关科目分析性测试的工作底稿之后,作为分析性测试的一部分。

从必要性角度看,将奔福德定律引入审计领域,可以完善现有的审计方法体系,丰富现有审计技术手段,给造假者进行财务舞弊增加更多困难,提高现有审计水平。将这一技术分析方法与审计人员已有的经验有机结合,凭借经验通过对敏感内容和敏感数字的分析,可以为财务舞弊行为提供预警信号。结合我国的审计现状来看,这种数值分析技术将成为审计实践的又一利器。

### 五、奔福德定律应用案例

1. 案例一。本文选取我国一家股份制企业作为研究对象,对其2005年度的真实财务数据(银行存款日记账和现金日记账的贷方金额)进行数值分析。

由于银行存款日记账和现金日记账的发生额笔数较多,其中的数据通常符合奔福德定律。如果这类账户中的数据不符合奔福德定律,超过我们认为的重要性水平,则需要根据异常线索加大审计力度。结果如图2和图3所示。

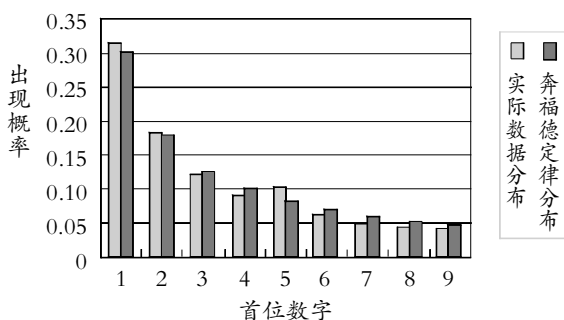


图2 银行存款日记账数值分析结果

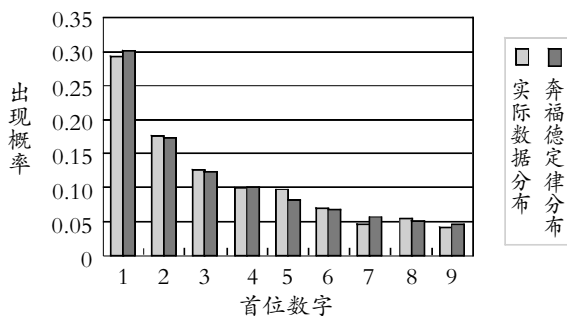


图3 现金日记账数值分析结果

银行存款日记账中的数据从总体上看符合奔福德定律,但是我们不难发现以“5”开头的数字出现的概率与奔福德定律的分布差距较大,经过对银行存款日记账的检查分析发现:该企业与其母公司之间有很多往来款项的转账,金额大多是500 000元,这些款项大多是母公司根据自己与该企业之间的分包协议而获得的项目收入。当剔除这类数据后,剩下的数据是符合奔福德定律的。对于审计所发现的项目收入转账为我们提供了一个重要线索,就是该企业与其母公司之间可能存在内部利润转移的行为,尤其当存在下列某一个或某几个前提时:母子公司分别纳税,而二者的所得税税率不同;母公司或子公司努力使财务指标达到某一政策界限;母公司或子公司修饰利润的需要。我们应对这一线索予以重视,进一步实施其他审计程序,重点跟踪,深入调查,判断其交易是否真实、转移价格是否合理、是否存在内部利润转移的行为等。

现金日记账中的数据从总体上看也符合奔福德定律,只有以“5”开头的数字出现的概率与奔福德定律的分布差距较大,经过对现金日记账的检查分析发现,该企业预借的差旅费支出频繁,且大部分金额都为5 000元。当剔除这类数据后,剩下的数据是符合奔福德定律的。

2. 案例二。奔福德定律也非常适合用来对样本量大的原始财务数据进行检验。在本例中,笔者采取模拟造假的方式,将造假数据、真实数据与理论分布值进行比较,来检验这种数值分析方法的效果。

对企业销售发票上的销售金额进行检验,共使用三组数据,分别是:①真实的财务数据;②计算机生成的一组随机数;③请销售人员编造的一组销售金额。这三组数据各包含2 022个数据,通过数值分析,结果如图4所示。

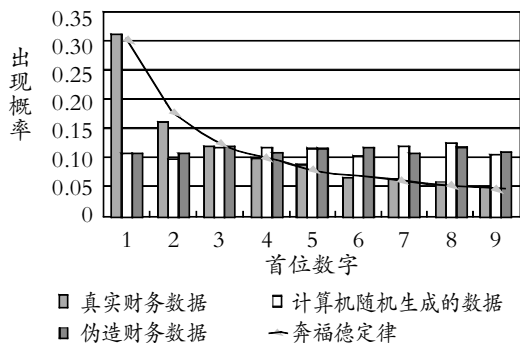


图4 各组不同来源数据数值分析结果

从图4可以看出:真实财务数据的分布和奔福德定律分布最为接近,计算机随机生成的数据和伪造数据都趋于平均分布。为使伪造的财务数据看起来更像是真的,往往平均使用各个数字,首位数上也不例外,所以其分布往往趋于平均分布。非常有趣的是,伪造财务数据与计算机随机生成数据的分布规律竟然惊人地相似,这对认识伪造财务数据的分布规律有重要的指导意义。

当然,伪造财务数据不一定都呈平均分布,而且其分布与奔福德定律分布的差异很大,这往往能给审计人员检查舞弊行为提供一个有效的线索,以进一步实施其他审计程序。

## 六、奔福德定律的优缺点及应用时应注意的问题

1. 奔福德定律的优缺点。运用奔福德定律进行舞弊审计具有使用成本低、方法简便易行、保密性好等优点。其缺点是它只能确定存在欺诈的可能性,并不能确定一定存在欺诈。另外,随着这种数值分析技术的广泛应用,对它了解的人越来越多,造假者会注意到这一规律,造假时也会加以考虑。不过对于造假者来说,还有一个难以逾越的障碍:应用奔福德定律进行数值分析时需要获得全部的数据,而造假者在造假时是不一定能通观全部数据的。而且,造假者无从知道审计人员在分析时是分析一个季度的数据,还是分析一个部门的数据,或是分析某个地区的数据。

### 2. 应用奔福德定律应注意的问题。

(1)注意这一定律的限制性条件,并不是所有类型的数据都符合奔福德定律。

(2)数据样本要有足够的量,样本量越大,则结果越可靠。经验表明,样本量在10 000以上的数据一般与理论值吻合得很好;在1 000~10 000之间吻合得较好;在200~1 000之间差距较大,但也有一定的参考意义;在200以下的,一般不符合奔福德定律。

(3)数据检测的结果如果不符合奔福德定律的概率分布,说明可能存在舞弊的征兆,审计人员还应以此为线索,追根寻源,查找能证明舞弊存在的有力证据。

(4)如果数据检测结果符合奔福德定律的概率分布,并不意味着一定不存在财务舞弊。尤其当数据总量非常大时,如果舞弊数据发生次数不多,它们就会被淹没在大样本之中。在大样本的情况下,审计人员还应该做分层测试。分层测试可以分很多种类,可以按样本的明细账户进行分层,可以针对不同的供货商、购货商进行分层,也可以根据不同购货地区、销售地区进行分层,还可以根据不同的季度甚至不同月份进行分层。这种分层测试对审计人员来说可以很简单地完成,但对于财务舞弊人员来说,要使每一分层的分布看起来合理相当困难。

(5)运用奔福德定律的数学表达式,我们还可以进一步计算出前2位数(10~99)、前3位数(100~999)上数字出现的理论概率值,进而可以将存在伪造可能性的数据的检测分析进一步扩大,捕捉到更多的舞弊线索。

(6)不符合奔福德定律的数据并不一定是伪造财务数据,有些频繁出现的数据可能是由于该企业特殊的购销特点或管理规定造成的,分析时应该剔除这些特殊因素,观察剩下的数

据的分布特点。举例来说,曾有人使用这一数值分析技术分析一家大型制药企业的会计账目,发现它的研发中心的研发费用数据不符合奔福德定律。但经过进一步的调查发现,其研发中心存在大量的已经过授权的、反复发生的交易,当把这类交易的数据剔除之后,剩下的数据是符合奔福德定律的。

一般排除上述因素后,若财务数据仍然和理论值差距较大,则意味着存在舞弊行为或者其他人为调节的情况。如母子公司之间的收入、成本、费用转账问题,在大型的集团企业或上市公司中是很常见的,为了美化或转移集团企业中上市公司的利润,母子公司之间往往存在频繁而又复杂的收入、成本、费用的结算,而且这些转移因为经过预先准备,往往都伴随有看起来非常合理的合同或协议,审计人员难以找到切入点和发现问题。使用奔福德定律进行检验不失为一个好办法,因为人为调节的收入、成本和费用数据很难符合奔福德定律。

## 七、奔福德定律的应用展望

1. 将奔福德定律纳入审计理论方法体系。从奔福德定律的特点来看,如果将这一数值分析技术应用于审计实践,可将其归入审计学中的分析性复核,并将统计学的其他抽样方法一起纳入审计理论方法体系。

2. 根据奔福德定律编制审计软件。国外同行已经根据奔福德定律编制了计算机审计软件并应用到审计实践中,我国审计人员应积极借鉴国外同行的成功经验。

3. 将奔福德定律应用到实证研究领域。一般来说,实证研究都要用到统计方法,奔福德定律丰富了实证检验的手段。利用奔福德定律可以验证许多经济现象,比如可以检验证券市场政策法规对企业财务数据的影响。在证券市场中,对企业首次发行股票、债券以及增发、配股、ST(特别处理)等都有严格的限制条件,很多企业会小心地使财务数据符合政策界限的要求,用奔福德定律进行统计分析可以帮助发现数据背后隐藏的秘密、评价企业财务数据的质量,也可以为政府部门提供制定政策的依据。

4. 利用奔福德定律为企业内部管理提供信息。利用奔福德定律可以检验企业的采购、生产、销售数据和成本、费用的发生额数据是否符合正常分布规律,是否出现数据的异常分布,从而可以给企业内部管理提供有效的事前预测和事中控制信息。首先,可以更合理地预测资金流动,更好地筹集和调拨资金;其次,企业内部审计人员也可以充分利用这一技术实施内部审计。

## 主要参考文献

1. Nigrini.M. I've got your number:How a mathematical phenomenon can help CPAs uncover fraud and other irregularities. Journal of Accountancy, 1999; 5
2. 阮滢. 舞弊审计的方法及内容. 郑州航空工业管理学院学报, 2003; 3
3. 赵保卿,任晨煜. 审计方法的历史演进及其动因. 北京工商大学学报(社会科学版), 2003; 2
4. 王戎. 研究和运用现代审计方法应注意的几个问题. 中国审计, 2004; 1