

马尔可夫分析法 在企业应收账款管理中的应用

蔡学雷 李新蕾

(中国矿业大学管理学院 江苏徐州 221008 中国联通平顶山分公司 河南平顶山 462500)

【摘要】 本文利用马尔可夫链状态转移矩阵对企业的应收账款进行分析、预测和动态监控,以期为加强企业对应收账款的管理提供参考。

【关键词】 马尔可夫链 模型 应收账款

马尔可夫分析法是俄国数学家马尔可夫在1907年提出,并由蒙特·卡罗加以发展而建立起的一种分析方法。它主要用于分析随机事件未来发展变化的趋势,即利用某一变量的现在状态和动向去预测该变量未来的状态及动向,以便采取相应的对策。

一、马尔可夫链及其状态概率矩阵模型

随机过程是指依赖于一个变动参数 t 的一组随机变量 $X(t), t \in T$ 。变动参数 t 所有可以取值的集合 T 称为参数空间, $X(t)$ 的值所构成的集合 S 称为随机过程的状态空间。按 S 和 T 是离散集还是非离散集可将随机过程分为四类。马尔可夫分析法只涉及随机过程中的一个子类,即所谓的马尔可夫过程。

定义:设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一个随机变量序列,用“ $X_n=i$ ”表示系统在时刻 n 处于状态 i 这一事件,称 $p_{ij}(n) = p(X_{n+1}=j | X_n=i)$ 为在事件“ $X_n=i$ ”出现的条件下,事件“ $X_{n+1}=j$ ”出现的条件概率,又称它为系统的一步转移概率,若对任意的非负整数 i_1, i_2, \dots, i, j 及一切 $n \geq 0$,有 $p(X_{n+1}=j | X_n=i, X_k=i_k, k=1, 2, \dots, n-1) = p(X_{n+1}=j | X_n=i) = p_{ij}(n)$,则称 $\{X_n\}$ 是一个马尔可夫链。定义说明在每一时刻上的状态仅仅取决于过程在前一过程的状态,而与这之前的状态无关。这一性质便是马尔可夫链的无后效性或无记忆性。若系统的一步转移概率 $p_{ij}(n) = p(X_{n+1}=j | X_n=i)$ 与初始时刻 n 无关,则可简记为 p_{ij} 。显然,一步转移概率具有以下性质: $p_{ij} \geq 0 (i, j=1, 2, \dots, n), \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 (i=1, 2, \dots, n)$,把各状态之间的一步转移概率排成矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

P 为转移矩阵。应用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程可知: $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot p = p^n$,即 n 步状态转移矩阵等于一步状态转移矩阵的 n 次方。

二、马尔可夫分析法在企业应收账款管理中的应用模型设计

由于各个企业客户的信用等级不同,因此在用马尔可夫链对企业应收账款进行分析和预测时,不仅要区分不同的信用等级,还需要充分考虑应收账款的本质特点和应收账款的流动资产特性,按照账龄的增加,逐步加长应收账款各账龄段的间距。参照国际上的通常做法,同时为了便于分析,按以下方式对企业的应收账款进行划分: N_1 为企业客户拖欠应收账款本息达(逾期)0~30天; N_2 为企业客户拖欠应收账款本息达(逾期)31~60天; N_3 为企业客户拖欠应收账款本息达(逾期)61~120天; N_4 为企业客户拖欠应收账款本息达(逾期)121~360天; N_5 为企业客户拖欠应收账款本息达(逾期)360天以上,即形成了呆账; N_6 为收回本息。

状态集合 $S = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$,其中, $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ 表示应收账款的状态。根据上述状态划分可以看出, N_1, N_2, N_3, N_4 显然属于非吸收状态,而 N_5, N_6 属于吸收状态,即逾期应收账款一旦转移到吸收状态,则将以概率1停留在此状态,不会再返回任何非吸收状态。那么,我们可以把状态集合 $S = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$ 划分为两大类: $T = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}; A = \{N_5, N_6\}$ 。

为了动态研究应收账款状态随时间变化的情况,可用转移矩阵 P 来表示每隔1个月的各种状态转移情况,用 p_{ij} 表示当前处于 N_i 状态的应收账款,1个月后将处于 N_j 的概率,并有:

$p_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^6 p_{ij} = 1 (i=1, 2, 3, 4, 5, 6; j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$,而根据 N_5, N_6 是吸收状态,可得:

$$P = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \\ N_1 & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & P_{16} \\ N_2 & P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & 0 & P_{26} \\ N_3 & P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & 0 & P_{36} \\ N_4 & P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} & P_{46} \\ N_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

其中:

$$Q = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & P_{16} \\ 0 & P_{26} \\ 0 & P_{36} \\ P_{45} & P_{46} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{则: } P^{(n)} = P^n = \begin{bmatrix} Q^n & (I-Q)^{-1}(I^n - Q^n)R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

由于非吸收状态最终都要进入吸收状态,即: $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0$,

$$\text{所以, } \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

在上述转移矩阵中,当 $i > j, i=2,3,4, j=1,2,3$ 时, p_{ij} 应理解为当前处于 N_j 状态,而在一个月中该欠款客户归还了部分的本金和利息,使应收账款转为 N_i 状态。

1. 计算各种状态的应收账款转为呆账或者收回本息的时间。

$$M = (I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-P_{11} & -P_{12} & 0 & 0 \\ -P_{21} & 1-P_{22} & P_{23} & 0 \\ -P_{31} & -P_{32} & 1-P_{33} & -P_{34} \\ -P_{41} & -P_{42} & -P_{43} & 1-P_{44} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

根据马尔可夫链的特征向量, $M = (m_{ij}), i=1,2,3,4, j=1,2,3,4$, 矩阵中每一个元素 m_{ij} 表示由非吸收状态 N_i 出发直至被吸收,停留在非吸收状态 N_j 的平均时间,从而推出:

$T(N_i) = \sum_{j=1}^4 m_{ij} (i=1,2,3,4)$ 表示各种状态的贷款在被吸收之前,经过所有非吸收状态的时间总和,即为状态 N_i 至最终被吸收所需要的平均时间。

其中: $T(N_1) = m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14}$ 表示应收账款由拖欠本息达(逾期)0~30天转为拖欠本息达(逾期)360天以上或收回本息的平均时间; $T(N_2) = m_{21} + m_{22} + m_{23} + m_{24}$ 表示应收账款由拖欠本息达(逾期)31~60天转为呆账或收回本息的平均时间; $T(N_3) = m_{31} + m_{32} + m_{33} + m_{34}$ 表示应收账款由拖欠本息达(逾期)61~120天转为呆账或收回本息的平均时间; $T(N_4) = m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{44}$ 表示应收账款由拖欠本息达(逾期)121~360天转为呆账或收回本息的平均时间。

2. 分析各种状态应收账款转为呆账及收回本息的概率。

$$B = M \cdot R = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

通过模型计算,根据马尔可夫链特征向量性质可得: b_{11} 表示由 N_1 状态转到 N_5 状态的概率; b_{12} 表示由 N_1 状态转到 N_6 状态的概率; b_{21} 表示由 N_2 状态转到 N_5 状态的概率; b_{22} 表示由 N_2 状态转到 N_6 状态的概率; b_{31} 表示由 N_3 状态转到 N_5 状态的概率; b_{32} 表示由 N_3 状态转到 N_6 状态的概率; b_{41} 表示由 N_4

状态转到 N_5 状态的概率; b_{42} 表示由 N_4 状态转到 N_6 状态的概率。

3. 预测企业基期应收账款最终转为吸收状态的金额。 k 时期各种状态的应收账款用 $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \lambda_4^k, \lambda_5^k, \lambda_6^k)$, $k=1,2,3, \dots$, 其中, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, 0, 0)$ 为基期各种状态应收账款总额。

$$[D \ G] = [\lambda_1^0 \ \lambda_2^0 \ \lambda_3^0 \ \lambda_4^0] \cdot B$$

其中, D 为企业基期应收账款中最终转为呆账的金额, G 为最终收回本息的金额。

三、应用举例

例:某企业当前月份的应收账款总额为500万元,其中属于 N_1 状态的应收账款为240万元,属于 N_2 状态的为140万元,属于 N_3 状态的为80万元,属于 N_4 状态的为40万元。而根据隔月的账面变化情况分析,过程如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.25 & 0.3 & 0 \\ 0.15 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 \\ 0 & 0.15 \\ 0.3 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$M = [I-Q]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0.75 & -0.3 & 0 \\ -0.15 & -0.1 & 0.7 & -0.3 \\ -0.1 & -0.1 & -0.15 & 0.7 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.683\ 292 & 0.739\ 817 & 0.349\ 127 & 0.149\ 626 \\ 0.594\ 347 & 1.726\ 240 & 0.814\ 630 & 0.349\ 127 \\ 0.644\ 223 & 0.612\ 358 & 1.862\ 012 & 0.798\ 005 \\ 0.463\ 425 & 0.483\ 513 & 0.565\ 254 & 1.670\ 823 \end{bmatrix}$$

$$B = M \cdot R = \begin{bmatrix} 0.044\ 888 & 0.955\ 112 \\ 0.104\ 738 & 0.895\ 262 \\ 0.239\ 401 & 0.760\ 599 \\ 0.501\ 247 & 0.498\ 753 \end{bmatrix}$$

$$[D \ G] = [\lambda_1^0 \ \lambda_2^0 \ \lambda_3^0 \ \lambda_4^0] \cdot B = [64.638\ 4 \ 435.361\ 6]$$

根据计算结果可知:依照目前的变化趋势,企业现有的应收账款500万元中,最终可能有64.638 4万元将转化为呆账,只有435.361 6万元能收回本息;在企业客户已拖欠本息达(逾期)0~30天的应收账款中,有4.49%的可能转为呆账、95.51%的可能付清,其转化为呆账或收回本息的平均时间为2.921 862个月;在企业客户已拖欠本息达(逾期)31~60天的应收账款中,有10.47%的可能转为呆账、89.53%的可能付清,其转化为呆账或收回本息的平均时间为3.484 344个月;在企业客户已拖欠本息达(逾期)61~120天的应收账款中,有23.94%的可能转为呆账、76.06%的可能付清,其转化为呆账或收回本息的平均时间为3.916 598个月;在企业客户已拖欠本息达(逾期)121~360天的应收账款中,有50.12%的可能转为呆账、49.88%的可能付清,其转化为呆账或收回本息的平均时间为3.183 015个月。

主要参考文献

吴育华,杜纲.管理科学基础.天津:天津大学出版社,2001