

利用数学模型确定企业最优资本结构

北京联合大学管理学院 曲喜和 王永萍 徐 鲲

【摘要】 一般认为,使综合资本成本(加权平均资本成本)最低,同时企业价值最大的资本结构是最佳的。在实践中,这样的标准是否可行是值得怀疑的。本文通过对影响资本结构的因素进行深入探讨和研究,找出评价资本结构的标准,建立了一个可以进行量化分析的资本结构决策数学模型。

【关键词】 数学模型 企业 资本结构

对于一个企业来说,什么样的资本结构才是最好的呢?比较普遍的观点是综合资本成本(加权平均资本成本)最低,同时企业价值最大的资本结构是最好的。这种观点认为,当企业自有资本与债务资本的比例最合理时,企业综合资本成本最低,此时企业收益和风险处于最佳平衡关系状态,企业价值最大。这种观点在理论上是成立的,但在具体实践中往往很难通过有效的方法找到最佳资本结构点。为了解决这个问题,本文通过对影响资本结构的因素进行深入探讨,找出评价资本结构的标准,建立一个可以进行量化分析的资本结构决策数学模型,用于资本结构决策。

一、影响资本结构的因素

1. 资产流动性。不同行业的企业资本结构是不相同的。一般来说,经营风险较高的行业会选择适当降低资产负债率,因为高经营风险与高财务风险的组合必然加大企业的总风险。资产流动性强的企业的负债率普遍高于其他企业,这些企业的资金流动性强,周转快,流动性资产就可以应付随时到期的债务,此时企业能以较高的债务比例经营。

2. 利息率。低利息率会促进企业举债,反之高利息率会阻碍企业举债。当企业投资利润率较低时,过高的利息负担不仅会增加资金支付的困难,甚至会抵消企业自有资本所带来的利润,此时企业应当尽可能减少举债。显然,利息率是影响债务筹资和资本结构决策的一个重要因素。

3. 所得税税率。由于节税利益的客观存在,所得税税率的变化会影响企业筹资行为。只有当企业资金利润率大于利息率时,企业才能得到节税利益;反之,企业举债将得不到任何利益,当然也不能得到节税利益。因此,当资金利润率大于利息率时,在所得税税率上升的情况下,企业为获得更多的节税利益,债务比例也会随之上调,如果所得税税率下降,企业举债的积极性就会下降。

4. 获利能力。企业获利能力的大小必然对企业资本结构产生影响。前面提到,当企业资金利润率大于利息率时,企业不仅可以获得节税收益,还能通过财务杠杆效应获得财务杠杆利益。当资金利润率较高时,企业会选择较高的债务比例,以求获得更多的财务杠杆利益和节税利益。

二、判断资本结构是否最优的标准

1. 投资报酬率。利润是企业再生产的主要资金来源,是企业生存与发展的必要条件,同时也是直观判断企业优劣的重要因素。一般可以通过两方面来评价企业的投资收益:一方面通过企业价值增量判断,利润是影响企业价值的主要因素;另一方面可以通过税后利润能否偿还贷款来判断资本结构是否合理。上述两方面标准可以用数学表达式表示为:

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{EBIT \times (1-T) + 2ID_t T - ID_t}{(1+r)^t} \quad (1)$$

$$\sum_{t=1}^n (EBIT - ID_t) \times (1-T) > D \quad (2)$$

式中,EBIT表示息税前利润;T表示所得税税率;I表示债务利息率;D表示债务额。

公式①表明了资本结构、税后利润与企业价值之间量的关系,从中可以看出企业价值是通过权益资本和债务资本的共同作用获得。公式②则表明了企业用各年的税后利润来偿还到期债务(到期一次还本),并且至少应在项目完成前还清全部贷款,否则企业将陷入债务危机,甚至导致企业破产。

2. 财务杠杆利益。如果以r表示利润率,债务筹资利益可以表示为: $P = Dr \times (1-T)$ 。具体包括两部分:财务杠杆利益和节税现值,如果将节税现值IDT扣除,则P为:

$$P = Dr \times (1-T) - IDT = D \times (r - rT - IT) \quad (3)$$

财务杠杆的合理运用预示着企业能通过债务筹资获得更多的财务杠杆利益。

3. 资本成本。债务筹资的债务成本主要是指企业通过银行贷款或发行债券进行筹资所发生的一切相关费用,包括利息、筹资费用等,这是债务筹资的基本成本。笔者认为,由于债务筹资的利息每期是固定的,不依从企业业绩的好坏,在业绩不好时企业就有出现支付危机的可能性,甚至企业会因到期债务无法偿还而导致最终破产,因此在考虑债务成本时应该考虑破产成本。以上两部分构成了债务筹资的资本成本。股权筹资的资本成本主要由定期向股东支付的股利和股息构成,另外还包括企业筹资的交易成本和税收成本等。股权筹资的资本成本一般要高于债务筹资的资本成本,因此企业会倾向

于资本成本较低的债务筹资,提高债务筹资的比例,以求获得更高收益。综合资本成本 K 的计算公式为:

$$K = \frac{K_S S}{S+D} + \frac{K_D D}{S+D} \quad (4)$$

式中, K_S 表示股权筹资的资本成本, K_D 表示债务筹资的资本成本, S 表示股权筹资额。

为了计算方便,本文只考虑贷款筹资和股票筹资两种筹资方式,其中贷款筹资的筹资费用数额较小,故忽略不计。则两种筹资方式的资本成本的计算方法分别为:

$$K_D = I \times (1-T) \quad (5)$$

$$K_S = \frac{H_1}{(1-F_C) \times S} + i_c \quad (6)$$

将公式⑤和公式⑥代入公式④,整理可得:

$$K = \frac{H_1 + (1-F_C) \times i_c \times S}{(S+D) \times (1-F_C)} + \frac{ID \times (1-T)}{S+D} \quad (7)$$

其中, H_1 表示第一年的股利, F_C 是股票筹资费用率, i_c 是股利增长的固定比率。从公式⑦中可以看出,综合资本成本与资本结构的关系是非常密切的。如果增加债务比例,企业的综合资本成本就会降低,如果增加权益筹资,综合资本成本就会升高。

4. 企业总风险。企业总风险是四个标准中最不好确定的,一般情况下企业总是尽量规避风险或者将风险控制在一定程度上。企业总风险主要包括经营风险、财务风险和破产风险。经营风险是指利用营业杠杆而导致息税前利润变动的风险。我们可以通过经营风险来判断企业的经营状况,通常企业盈利波动越大则经营风险越大,由此可见经营风险是影响资本结构的重要因素。前面已经多次提到了财务杠杆,而财务风险是指债务筹资带来的风险,也就是财务杠杆的负杠杆效应,这里就不再赘述。破产风险可以看做是经营风险和财务风险共同作用的结果,随着企业经营风险和财务风险的增大,企业破产的概率就会增大,这样的风险称之为破产风险。破产风险是随着债务比例的增加而增加的,此时企业应尽量避免债务比例过高带来的高风险。同样,我们需要一个能概括各个风险的指标,本文利用联合杠杆系数与总资本的乘积作为衡量风险的指标。联合杠杆是指企业同时利用营业杠杆和财务杠杆,联合杠杆系数就是企业联合杠杆的运用程度,联合杠杆系数越大,说明企业总风险越大。联合杠杆系数 DTL 的计算公式为:

$$DTL = \frac{E-VC}{E-VC-FC} \times \frac{EBIT}{EBIT-ID} \quad (8)$$

其中, E 表示销售额, VC 表示变动成本总和, FC 表示固定成本总和。

我们发现, $(E-VC-FC)$ 就是税前利润 $(EBIT-ID)$,将“ $E-VC-FC = EBIT-ID$ ”代入公式⑧,整理可得:

$$DTL = \frac{EBIT-ID+FC}{EBIT-ID} \times \frac{EBIT}{EBIT-ID} \quad (9)$$

联合杠杆系数还不能直接应用于模型中,需要在联合杠杆系数的基础上乘以总资本,以此来衡量企业总风险。

综上所述,资本结构很大程度上决定了企业的抗风险能

力,只要保持适当的债务比例,企业就不用过多地为风险担忧;同时各种风险也影响着资本结构,总风险较大的时候,企业会通过降低债务比例等途径降低总风险。

三、资本结构决策模型及其应用

1. 模型的建立。如前所述,资本结构决策需要考虑四个标准,分别是投资报酬率、财务杠杆利益、资本成本和总风险。因此模型的构造就是从这四个标准出发,从目标函数上看,要分别满足这四个标准,即投资报酬率和财务杠杆利益的相对极大值以及资本成本和总风险的相对极小值。这里提到相对值是因为前两个标准与后两个标准在实际中是相互矛盾的,不可能同时达到极大值和极小值,所以要同时满足它们就需要进行调整,从而得到相对的极大值和极小值。模型的约束条件也是从这四个标准得到的,每一个约束条件都有其内在的含义和所要说明的问题。

(1)模型假设。企业连续经营;银行能保证企业贷款需要;每期付息,当期贷款利息计入企业当期财务费用;企业只通过贷款和普通股筹资;企业贷款到期一次还本,且利息资本化忽略不计。

(2)模型建立。目标函数为:

$$\max[V(D,r)+P(D,r)]; \min[K(D,r)+DTL(D,r)]$$

约束条件:

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{EBIT \times (1-T) + 2ID_t T - ID_t}{(1+r)^t} \quad (10)$$

$$\sum_{t=1}^n (EBIT - ID_t) \times (1-T) > D \quad (11)$$

$$P = D \times (r - rT - IT) \quad (12)$$

$$K = \frac{H_1 + (1-F_C) \times i_c \times S}{(S+D) \times (1-F_C)} + \frac{ID \times (1-T)}{S+D} \quad (13)$$

$$DTL \times G = \frac{EBIT - ID + FC}{EBIT - ID} \times \frac{EBIT}{EBIT - ID} \times G \quad (14)$$

$$0 \leq D \leq G, r_{期} \leq r, P > 0$$

其中, G 为总筹资额。目标函数分别是求企业价值增量以及财务杠杆利益的最大值和资本成本以及联合杠杆系数的最小值。约束条件中,公式⑩表示企业价值的增量;公式⑪表示企业需要在还款期之前还清全部债务;公式⑫表示财务杠杆利益;公式⑬表示企业的综合资本成本;公式⑭表示企业联合杠杆系数与总资本的乘积。最后三个变量约束分别是:债务筹资额要小于企业总资本,且是正数;资本利润率要大于或等于企业期望资本利润率;财务杠杆利益大于零。

将 $EBIT = Gr + ID, D_t = D \times (1+r)^t, S = G - D$ 代入模型,整理后得:

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{(Gr + ID) \times (1-T) + 2ID \times (1+r)^t T - ID \times (1+r)^t}{(1+r)^t}$$

$$\sum_{t=1}^n [(Gr + ID) - ID \times (1+r)^t] \times (1-T) > D$$

$$P = D \times (r - rT - IT)$$

$$K = \frac{H_1 + (1-F_C) \times i_c \times (G-D)}{G \times (1-F_C)} + \frac{ID \times (1-T)}{G}$$

$$DTL \times G = \frac{(Gr+FC) \times (Gr+ID)}{Gr^2}$$

$$0 \leq D \leq G, r_{期} \leq r, P > 0$$

2. 模型的约化。上述模型是一个多目标的非线性规划模型,该模型在数学上一般是无解的,因此需要约化模型,并通过新的模型计算出一个确切的解。

每个决策者对于项目的价值观是不同的,同一个项目不同的决策者会做出不同的筹资方案,有些投资者认为收益对于企业是最重要的,另一些则认为规避风险是最重要的。鉴于这一点,笔者认为可以由每个决策者自己制定决策标准,也就是选择自己的目标函数。具体做法是分别对四个目标配以权数,权数值和为1,具体到每个目标的权数由决策者自己决定。这样模型计算出的结果就是符合决策者自己偏好的合理的资本结构。因此可将模型改进为:

$$\text{目标函数: } \max Z = \beta_1 V + \beta_2 P - \beta_3 K - \beta_4 DTL$$

约束条件:

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{(Gr+ID) \times (1-T) + 2ID \times (1+r)^t - ID \times (1+r)^t}{(1+r)^t}$$

$$\sum_{t=1}^n [(Gr+ID) - ID(1+r)^t] \times (1-T) > D$$

$$P = D \times (r - rT - IT)$$

$$K = \frac{H_1 + (1-FC) \times i_C \times (G-D)}{G \times (1-FC)} + \frac{ID \times (1-T)}{G}$$

$$DTL \times G = \frac{(Gr+FC) \times (Gr+ID)}{Gr^2}$$

$$0 \leq D \leq G, r_{期} \leq r, P > 0; \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1; 0 \leq \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \leq 1$$

3. 模型的应用。某企业拟投资一个1000万元的五年期项目,其中固定资产投资500万元,项目当年投产。企业希望项目的资本利润率至少大于10%。企业贷款的利率为5%,每年付息,五年末一次性还清贷款本金。企业所得税税率33%。每年的折旧和员工工资等固定成本为125万元。企业第一年发放的股利为第一年税后利润的10%,以后每年以5%的比率固定增长,普通股的筹资费用率4%。企业决策者认为企业利润最为重要,愿意为此提高风险,因此将利润的权数定为0.30,财务杠杆利益的权数是0.22,资本成本的权数是0.28,风险的权数是0.20。此时企业应如何选择资本结构,并得到满意的资本利润率?

将上述条件代入模型得到:

$$\text{目标函数: } \max Z = 0.3V + 0.22P - 0.28K - 0.2DTL$$

约束条件:

$$V = \sum_{t=1}^5 \frac{(1000r+5\%D) \times (1-33\%) + 2 \times 5\%D \times (1+r)^t \times 33\%}{(1+r)^t}$$

$$\frac{5\%D \times (1+r)^t}{(1+r)^t}$$

$$\sum_{t=1}^5 [(1000r+5\%D) - 5\%D \times (1+r)^t] \times (1-33\%) > D$$

$$P = D \times (r - r \times 33\% - 5\% \times 33\%)$$

$$DTL \times G = \frac{(1000r+125) \times (1000r+5\%D)}{1000 \times r^2}$$

$$K = \frac{10\% \times 1000r \times (1-33\%) + 5\% \times (1000-D) \times (1-4\%)}{1000 \times (1-4\%)}$$

$$+ \frac{5\% \times D \times (1-33\%)}{1000}$$

用数学软件MATLAB 6.0计算这个非线性规划,求得D=445.8, r=18.2%。即企业利用贷款筹集资金445.8万元,普通股筹集资金554.2万元,项目的资本利润率能达到18.2%。

对示例的利息率和贷款期限进行相应调整后(其他条件不变)重新计算,结果如下表:

还款期限 \ 利率	5年		10年		15年	
	r(%)	D(万元)	r(%)	D(万元)	r(%)	D(万元)
5%	18.2	445.8	20.5	478.6	23.6	513.5
8%	17.5	433.5	18.9	460.4	22.7	492.2
10%	16.3	420.6	16.8	432.5	20.5	470.6

上述结果基本验证了前文资本结构影响因素中关于利息率与债务关系的论述,即若提高利息率I,会导致债务D减少;若利息率I下降,会使债务D增加。同时还款期限与债务的关系也得到了验证,还款期限的延长意味着企业能获取更多的利润,同时企业的还款压力也会减小,这时企业自然会更多地利用债务筹资。

从结果可以看出,资本成本最低的资本结构并不是最优资本结构。究其原因,资本结构并不是只由资本成本决定的,而是利润率、财务杠杆利益、资本成本和总风险互相制约、共同作用的结果。由于这四个标准相互矛盾,计算结果就不会因为某一个标准的作用而出现大幅变化。当然,此模型还有些问题需要进一步研究,其结果也需要实践的检验。该模型最大的特点就是决策者可以按照自己的意愿决定企业的资本结构,这样既满足了决策者不同的偏好,同时也考虑到了各方面的影响。当然决策者也不能过于偏重某一标准,笔者认为单个标准的权数最好不要超过0.5,此时得到的结果比较合理。

该模型还有很多需要改进的地方。例如前面提到,企业总风险由三个风险构成,但在模型中并没有体现出破产风险,而且实际上企业风险是不可预测的,模型中总风险的衡量并不能代表真实的企业风险。针对这一点,用概率结合计算机模拟的方法可以在一定程度上解决这个问题,这也是模型改进的方向之一。

另外,企业有很多种筹资方式,模型中只考虑了贷款筹资和普通股筹资,因此模型中资本成本的评价是存在不足的。

主要参考文献

1. 伍中信. 资本经营财务概论. 成都: 西南财经大学出版社, 2002
2. 潘敏. 资本结构、金融契约与公司管理. 北京: 中国金融出版社, 2002
3. 曲喜和. 财务管理. 北京: 北京邮电大学出版社, 2007
4. 王勇海. 资产定价理论. 北京: 经济科学出版社, 2000