投资决策 NPV 法的数学模型改进

鄢　鹏　肖　珂

（西南财经大学　成都　610074）

【摘要】本文分析了传统 NPV 法的不足之处，并提出了相应的数学改进方法，包括整数规划模型、马氏链模型和目标规划模型等，以提高 NPV 法的科学和实用性，为长期投资与资本预算决策者提供参考。

【关键词】NPV　资本预算　马尔可夫链

在传统的公司金融理论中，NPV 法常作为实物投资与金融投资决策的准绳而被广泛应用。然而，公司金融理论同时也指出了 NPV 法的几点不足：在有资本限额情况下存在项目选择问题；预期现金流估计准确化和风险问题等。NPV 法是对未来预期现金流进行折现，作为随机变量的现金流，必然存在估计准确性与风险的问题。如果不对风险进行优化控制，可能接受过于冒险的项目而使 NPV 法失灵；风险估计过大，又可能拒绝掉某些具有较好潜在增长能力的项目。本文针对 NPV 法上述两个主要的不足，借助数学决策论等方法，通过量化模型，对 NPV 法进行了完善。

一、传统 NPV 法的不足与改进

1. *有资本限额的情况。*当财务经理面对 n 个 NPV>0 的投资项目，但投资资本却有限时，传统的办法就是将投资方案各种组合情况进行一一比较，选择预期收益最大的投资方案。从计算科学的角度来看，含有 n 种投资项目的投资集合，其子集即各种投资组合共有 2^n 个，算法相当复杂，所以当投资项目很多时，人工组合选择既花费大量时间，又容易出错。

要进行投资方案选择，满足资本总量约束，使公司预期收益最大，可借助运筹学的规划与优化方法来进行解决。在这里先不考虑预期现金流的风险分布问题，假设 n 种投资项目（本文讨论的投资均为长期投资，如经营期很长的大型项目或者长期股权投资等），且 $NPV_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，C_i 表示初始投资成本，总投资资本为 C（当无资本限额时，令 $C=\infty$），CF 表示未来现金流值，r 为无风险贴现率，决策变量为 X_i，约定当 X_i 等于 1 时表示对第 i 个项目进行投资，等于 0 则表示不投资。于是我们可得到以下非线性规划模型：

$$\begin{cases} \max S=\max(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\times NPV_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}X_iC_i\leqslant C \qquad NPV_i=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\dfrac{CF_{(i,t)}}{(1+r)^t} \\ 0\leqslant X_i\leqslant 1 \\ X_i\in Z \end{cases}$$

当 n 种投资项目给定后，将各种参数带入上述模型求解，可得到最优投资方案向量：$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$。对于该非线性（整数）规划模型，可采用分支定界、隐式枚举等传统算法，或者启发式的算法如遗传算法、模拟退伙算法等，通过编制 MATLAB 程序实现具体求解。

2. *考虑未来现金流的分布风险。*

（1）风险的估计方法。风险的产生，源于未来现金流估计准确性问题。未来每期的现金流量是随机变量，分布不可确定，因此公司必然面临未知的风险。在这里我们仍然按照传统方法，用现金流分布的标准差来衡量风险。但每一期都要确定现金流的分布并估算方差风险，不仅情况相当复杂，而且容易出错。我们对现金流做一定假设：①现金流有高、中、低三种状态；②即期状态确定后，下期转化为另一种状态或保持原状态；③现金流分布无后效性。

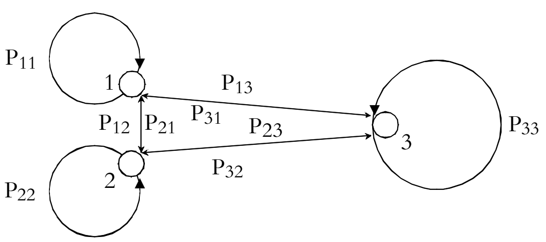
对于更多状态下的分布，可以在三种状态的基础上推广。转移概率可以通过大量统计数据得出。但假设经济数据无后效性的假设较难成立，因为一般经济现象是有一定的滞后性的。如果对第三个假设进行更深层次的讨论，对于这种具有滞后性的随机时间序列，可以用 ARIMA 自回归移动平均模型等方法来进行模拟估计。这里通过该假设简化模型，以求满意的近似最优解。在无后效性假设下，对于每期现金流分布（离散的随机转移过程），我们可以用马尔可夫链模型来描述。马尔可夫链模型是解决随机转移过程的工具，它可以模拟系统在各个时期所处状态的概率分布，被广泛应用到经济学、社会学、生态学、遗传学等诸多领域。

A_t 表示第 t 期现金流的状态（高=1，中=2，低=3），记 $a_i(t)=P(A_t=i)$，即状态概率；定义 $P_{ij}=P(A_t+1=j|A_t=i)$ 为转移概率，则有随机矩阵 $P=\{P_{ij}\}3\times3$。再引入状态概率向量：$a(t)=(a_1(t),a_2(t),a_3(t))$，以及随机转移方程：$a(t+1)=a(t)P$，$a(t)=a(0)P^n$，其中 $a(0)$ 为初始状态概率向量。基本约束有：

$$\sum_{i=1}^{3}a_i(t)=1;P_{ij}\geqslant0;\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=1$$

根据假设和马尔可夫链原理，P 中元素大于 0，当时期 t 增加时，现金流处于高、中、低三种状态的概率趋于稳定，存在唯一的极限稳态概率 $w=(w_1,w_2,w_3)$ 满足：

$$\sum_{i=1}^{3}w_i=1$$



因为给定的是长期投资项目，我们可认为现金流状态概率很快达到稳定，稳定后每期的现金流分布不变，我们可计算稳定状态下各投资项目的现金流分布标准差，以此衡量该项目的风险程度。而最终投资决策的风险衡量，我们采用各个已选择投资项目的标准差，以它们的初始投资金额为权数进行加权求和，作为总现金流标准差。

（2）考虑CF分布风险下的投资决策优化。传统NPV法为了衡量现金流的风险，采用各种办法在无风险利率基础上进行风险加成（风险溢价），然后直接以NPV的正负情况来判断投资项目可否执行。传统的风险溢价确定方法有CAPM法、确定当量法、风险偏好系数法等等。CAPM法基于传统的资本资产定价模型，其前提假设过于严密，特别是对于我国的弱式有效资本市场来说实用性不强。而当量确定、风险偏好系数法等引入主观评价系数，为真正的客观量化分析带来困难。风险溢价确定的困难是造成NPV法失灵的主要原因，而我们认为只有无风险利率是较准确的。因此，为了改进传统NPV法的不足，应仍以无风险利率为贴现率贴现预期现金流，计算各项目的NPV；同时将各项目的风险（按马尔可夫链模型计算出的标准差）分离出来，以投资金额为权数加权求和，与投资总收益共同构成规划问题的优化目标。我们要力求高收益与低风险，对于该双目标规划问题，下面借助运筹学GP模型进行描述与求解。

目标规划是由线性规划（LP）演变而来的，目前已成为一种简单、实用的处理多目标管理的有效工具。根据GP模型思想，对于每个目标均给定一个理想值，总的决策目标就是使各目标函数与理想值的“偏差”加权和达到最小，即：$\min\sum_{i=1}^{m}\lambda_i|f_i(X)-f_i^*|$。这里的总“偏差”取各目标偏差的绝对值加权和，类似于统计学聚类分析中各目标值与中心的“距离”，距离越小，则说明总目标优化程度越高。由此，结合到我们的问题中，可得GP规划：

$$
(GP)\begin{cases}
\min T=\min\sum_{i=1}^{2}[\lambda_i(d_i^{+}+d_i^{-})] \\
\sum_{i=1}^{n}X_i\times NPV_i+d_1^{-}-d_1^{+}=f_1^* \\
\sum_{i=1}^{n}\dfrac{C_i}{\Sigma C_i}\times\sigma_i+d_2^{-}-d_2^{+}=f_2^* \qquad NPV_i=\sum_{t=0}^{\infty}\dfrac{\overline{CF}(i,t)}{(1+r)^t} \\
\sum_{i=1}^{n}X_i\times C_i\leqslant C \\
d_1^{-}\times d_1^{+}=0,\ d_2^{-}\times d_2^{+}=0 \\
0\leqslant X_i\leqslant 1,\ X_i\in Z
\end{cases}
$$

其中：f_i^*表示理想目标值，d_i^-、d_i^+分别表示实际值与f_i^*的正、负偏差变量。σ_i即为基于马氏链模型计算得出的各投资项目的现金流分布标准差计算NPV时因为引入了风险变动，对于CF现金流折现应采用现金流的期望值，这点与前文整数规划模型有所区别。其他的参数与前文所述一致。GP问题常用求解方法有图解法和单纯形法，分别代表图上作业与表上作业的思想，都是运筹学中的一些经典算法。在各种参数给定的情况下，我们可以求出最优的决策向量X，最优的总期望收益$\overline{R}$和总风险标准差σ。

对该GP问题结果做灵敏性分析，当λ在变化时（其实际意义是投资决策者的风险容忍度变化），每一个给定的λ下都可以得到一对最优二维数组（$\overline{R}^*$，σ^*）。因此可得到参数方程：

$$
\begin{cases}
\overline{R}^*=R(\lambda) \\
\sigma^*=\sigma(\lambda)
\end{cases}
$$

其中：λ为参数。这个基于GP问题导出的参数方程组很难通过对λ消参求出$\overline{R}$与σ之间的确切的轨迹曲线（函数关系）；但可以通过改变λ，借助MATLAB数值计算功能得出多个二维数组，在$\overline{R}-\sigma$二维坐标系中对离散的点进行曲线拟合。这样得出的曲线，与证券投资分析中的有效前沿具有相似意义，描述了最优投资方案的“选择轨迹”。对于特定的投资决策者，他们要做的就是找出公司总体的期望效用函数与这里的拟合曲线相切的点，得出近似最优的投资决策。

二、小结

公司理财理论最重要的研究内容之一就是整个公司的投资战略的制定，也就是资本预算问题。资本预算与投资决策的重要方法有：NPV法、回收期法、平均会计收益率法、内部收益率法、盈利指数法等等。传统公司理财理论已经证明NPV法是各决策方法中最科学最实用的。然而NPV法自身也存在一些不足。本文针对这些不足，提出改进模型，探索和研究NPV法的改进方法。文中的数学内容主要涉及运筹学与概率统计的知识，所建立的基本模型，可以根据不同的实际情况进行修改并扩展应用，具有较强的灵活性。比如：当现金流分布情况增多时，需增加转移概率并扩增状态转移矩阵。在估计现金流分布风险时用到了马氏链模型，如果要削弱模型的假设三，可以引入自回归模型等有关随机过程、离散时间序列的处理办法。对各个模型的具体求解，给出了常用和启发性的求解办法，具体步骤大家可以参阅有关计算科学的文献。

从金融投资理论开创发展至今，我们都在努力量化和最优化收益、风险等一系列目标。本文旨在探索和研究投资理论的数学改进方法，希望能给予大家一定参考；而经济世界的科学化进程，仍然任重而道远。

主要参考文献

1. 斯蒂芬·A.罗斯等著.吴世农等译.公司理财.北京：机械工业出版社，2007

2. 陈戈止.管理运筹学.成都：西南财经大学出版社，2006

3. 姜启源，谢金星，叶俊.数学建模.北京：高等教育出版，2007