投资组合理论下最优资产组合问题求解

程宇楠

（华南理工大学金融工程研究中心 广州 510006）

【摘要】本文从数学角度出发，分析了现代投资学中的投资组合理论。主要内容包括用广义逆矩阵方法对最优组合进行求解，以及给出投资组合两个重要特征的证明，即有效组合的组合仍然有效以及 CAPM 定价公式的推导。

【关键词】投资组合 广义逆矩阵 最优选择

很少有定量投资理论能像投资组合理论一样被广为流传和引起广泛争议。投资组合理论主要研究人们在预期收入受到多种不确定因素影响的情况下如何进行分散化投资来规避投资中的系统性风险和非系统性风险，以实现投资收益的最大化。马可维茨的均值-方差组合模型开创了现代投资理论研究的先河，为利用风险和收益分析进行投资选择提供了理论基础。其主要假设有：第一，市场上所有投资者均为风险规避者，即在既定收益下偏好风险较小的组合；第二，所有资产的预期收益、方差以及它们之间的协方差已知；第三，投资者只要利用各资产的收益、方差以及协方差就可以求出最优组合；第四，市场无摩擦，即没有交易成本和税收。当以上假设条件得到满足时，可以严格求出最优投资组合边界。但由于实际中各资产的收益、方差以及协方差都是未知的，只能利用历史数据进行预测，因而可能导致求出错误的最优组合边界。

一、两种资产的配置

首先考察两种风险资产的最优组合问题。假设有资产 1 和资产 2，其期望收益分别为 $E(R_1)$、$E(R_2)$，方差分别为 σ_1、σ_2，在组合中的权重为 w_1、w_2，$\rho_{1,2}$ 为两资产收益的相关系数。于是，组合的期望收益为：

$$E(R_p)=w_1\cdot E(R_1)+w_2\cdot E(R_2) \tag{1}$$

组合收益的方差为：

$$\sigma_p^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \tag{2}$$

另外有：

$$w_1+w_2=1 \tag{3}$$

由于 $-1\leqslant\rho_{1,2}\leqslant1$，所以方程(2)正定。将方程(2)对 w_1 求导解出“$w_1=(\sigma_2^2-\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)/(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)$”时，组合收益的方差有最小值，此时对应收益为 $E(R_p)$，假如 $\sigma_1=\sigma_2$，则 $w_1=w_2=0.5$，$E(R_p)=1/2[E(R_1)+E(R_2)]$。由方程(1)和方程(3)可以得出，组合的期望收益与 w_1(或 w_2)呈线性关系，且两种资产的情况比较特殊，当两种成分资产的预期收益不同时，既定收益下组合有唯一的权重，因而不存在等收益时的最小方差优化问题，当然，理性的投资者不会选择收益小于 $E(R_p)$ 的组合。如果两种成分资产的预期收益相同，则方程(1)和方程(3)等价，于是只能获得唯一收益。另外，从方程(2)也可以看出，在 $0\leqslant w_1,w_2\leqslant1$ 时(即不允许卖空时)，两种资产的相关系数越小，组合分散风险的效果越好，而允许卖空时，卖空情况下的风险分散能力减弱。

二、多种资产的配置

下文考察资产数量多于两种的情况。此时，对应一定收益的资产权重将不再固定，不同权重组合收益的方差也会随之变化。与两种资产配置类似，多种资产配置同样由以下三个方程决定。

组合的期望收益为：

$$E(R_p)=\sum_{i=1}^{n}w_iE(R_i) \tag{4}$$

组合收益的方差为：

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j \tag{5}$$

另外有：

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1 \tag{6}$$

这是一个约束条件下的二次规划问题，当允许卖空、权重可以小于 0 或大于 1 时，可以运用拉格朗日乘数法求解各既定收益下的最小方差。本文拟采用二次规划的广义逆矩阵方法对最优解进行分析。设 $A\in R^{m\times n}$，A^+ 为 A 的广义逆矩阵，则 A^+ 满足 perrose 条件：①$AA^+A=A$；②$A^+AA^+=A^+$；③$AA^+=(AA^+)^T$；④$A^+A=(A^+A)^T$。如果 A 是行满秩矩阵，则 $A^+=A^T(AA^T)^{-1}$；如果 A 是列满秩矩阵，则 $A^+=(A^TA)^{-1}A$。

引理 1：设线性方程组 $Ax=b$ 有解，则其解可表示为：$x=A^+b+H\xi$。这里，H 是 A 的投影阵，即 $A\in R^{m\times n}$ 若为行满秩，则 $H=I-A^T(AA^T)^{-1}A$，$\xi\in R^n$ 为任意向量。于是资产数量大于 2 且允许卖空时，既定收益下最优组合问题表述为：

$$\begin{cases}\min(\sigma_p^2)=\omega^TG\omega\\ s.t.\ A\omega=b\end{cases} \tag{7}$$

这里，G 为各资产的协方差矩阵，因而 G 正定，且 $\omega=[\omega_1\cdots\omega_n]^T$，$A=\begin{bmatrix}E(R_1)\cdots E(R_n)\\ 1\cdots1\end{bmatrix}$，可知，当资产数量大于 2 且各资产收益不同时，矩阵 A 为行满秩，$b=[E(R_p)\ 1]^T$。设 $\bar{\omega}$ 为满

足条件的一个容许解，令 $\omega=\overline{\omega}+x$，于是方程（7）的等价问题为：

$$\begin{cases}\min(\sigma_p^2)=x^TGx+2x^TG\overline{\omega} \\ \text{s.t. } Ax=0\end{cases} \qquad (8)$$

由于 $A\in R^{m\times n}$ 为行满秩（秩为 2），故 $A=RP$，$P_{m\times n}$ 的行向量组为标准正交向量组，$P\times P^T=I_{m\times m}$，$R_{m\times m}$ 为下三角阵，P、R 可通过施密特正交化等方法求出。

$$P=\begin{bmatrix} e_1\cdots e_n \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\cdots\frac{1}{\sqrt{n}}\end{bmatrix}$$

其中，$e_j=\dfrac{E(R_j)-E(\overline{R})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[E(R_i)-E(\overline{R})]^2}}$，$\sum_{i=1}^{n}e_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}e_i^2=1$。

于是，$Ax=0$ 的充要条件是 $Px=0$。根据引理 1 得：$x=(I-P^TP)y$，$y\in R^n$ 为任意向量。于是上述问题转化为如下等价的无约束二次规划问题：

$$\min(\sigma_p^2)=\min[y^T(I-P^TP)^TG(I-P^TP)y+2y^T(I-P^TP)^TG\overline{w}] \qquad (9)$$

可以证明，一般情况下组合中各资产收益不完全相关情况出现时，该问题有唯一最优解。

资产的最优组合有一个重要性质，即如果 $W_a=[\omega_{a1}\cdots\omega_{an}]^T$，$W_b=[\omega_{b1}\cdots\omega_{bn}]^T$ 分别为组合收益为 $E(R_a)$、$E(R_b)$ 时的最优组合，那么其线性组合 $W_c=\lambda_aW_a+\lambda_bW_b$ 是收益为 $E(R_c)=\lambda_aE(R_a)+\lambda_bE(R_b)$ 时的最优组合，其中：$\lambda_a+\lambda_b=1$。下面对其进行简要说明。首先有条件：$AW_a=b_a$，$AW_b=b_b$，由于 $E(R_a)\neq E(R_b)$，于是 b_a、b_b 线性无关，所以 W_a、W_b 线性无关。利用前文得出的结论，$W_a=\overline{\omega_a}+x_a$，$W_b=\overline{\omega_b}+x_b$，可知 $\overline{\omega_a}$、$\overline{\omega_b}$ 满足约束条件，因而 $\overline{\omega_c}=\lambda_a\overline{\omega_a}+\lambda_b\overline{\omega_b}$。设 $E(R_c)=\lambda_aE(R_a)+\lambda_bE(R_b)$ 时的最优组合为 W'，则 $W_c'=\overline{\omega_c}+x_c$。我们只需要证明：$x_c=\lambda_ax_a+\lambda_bx_b$。进一步由于 $x=(I-P^TP)y$，问题又转化为证明：$y_c=\lambda_ay_a+\lambda_by_b$。令 $(I-P^TP)=C$，方程（9）可以写成 $\min(\sigma_p^2)=\min(y^TC^TGCy+2y^TC^TG\overline{\omega})$。

因为 y_a、y_b 为最优组合，且 $G^T=G$，所以 $\dfrac{\partial(y_a{}^TC^TGCy_a+2y_a{}^TC^TG\overline{\omega_a})}{\partial y_a}=0=2C^TGCy_a+2C^TG\overline{\omega_a}$；对 y_b，同理有：$2C^TGCy_b+2C^TG\overline{\omega_b}=0$。将上述两式分别乘以 λ_a、λ_b 再相加可得：$C^TGC(\lambda_ay_a+\lambda_by_b)+C^TG\overline{\omega_c}=0$，对比 y_c 为最优组合的一阶条件，$\dfrac{\partial(y_c{}^TC^TGCy_c+2y_c{}^TC^TG\overline{\omega_c})}{\partial y_c}=2C^TGCy_c+2C^TG\overline{\omega_c}=0$，且最优组合唯一，可知：$y_c=\lambda_ay_a+\lambda_by_b$，命题得证。该命题也可以通过几何方法直观地看到，即最优组合是一系列关于同一中心点对称的等标准差椭圆和一簇等收益平行线的切点，因而它是一条直线，直线上任意两点的线性组合可以合成直线上任意一点。资产最优组合的上述特征说明，在可卖空的条件下，只要求得任意两个最优组合，就可以通过它们的线性组合求出整个最优边界。其重要意义除提供了一种求得最优组合的简便方法之外，还说明如果每一个投资者均持有有效组合，他们的合并组合也必定为有效组合。从这个意义上说，这一特征导出了 CAPM（资本资产定价模型）理论的主要结论。除上述特征外，资产组合理论还可以推导出 CAPM 的定价公式，即任取一有效组合 M，任意股票 i 的收益率和其β系数之间都存在确定的线性关系。其中：$\beta_i=\dfrac{Cov(R_i,R_M)}{\sigma^2(R_M)}$。为证明这一结论，我们可以用股票 i 与有效组合 M 进行组合，组合的期望收益 $E(R_p)=w_iE(R_i)+(1-w_i)E(R_M)$，组合收益的方差 $\sigma_p^2=w_i^2\ E(R_i)+(1-w_i)^2E(R_M)+2w_i(1-w_i)Cov(R_i,R_M)$。当 $w_i=0$ 时，有 $E(R_p)=E(R_M)$，且此时 $\dfrac{\partial E(R_p)}{\partial\sigma_p}=\dfrac{\partial E(R_M)}{\partial\sigma_M}$，若上式不成立，则可通过股票 i 与组合 M 构建出比 M 点更优的组合，与 M 定义不符。令 $\dfrac{\partial E(R_M)}{\partial\omega_i}=\dfrac{E(R_M)-Z}{\sigma_M}$，Z 为收益坐标轴上的一点。而 $\dfrac{\partial E(R_p)}{\partial\sigma_p}=\dfrac{\partial E(R_p)}{\partial\omega_i}\Big/\dfrac{\partial\sigma_p}{\partial\omega_i}$，$\dfrac{\partial E(R_p)}{\partial\omega_i}=E(R_i)-E(R_M)$，$\dfrac{\partial\sigma_p}{\partial\omega_i}=\dfrac{1}{2\sigma_p}\ \dfrac{\partial\sigma_p^2}{\partial\omega_i}=\dfrac{1}{2\sigma_p}[-2\sigma_M^2+2Cov(R_i,R_M)]=-(\sigma_M+\sigma_M\beta_i)$。综上可得：$\beta_i=\dfrac{E(R_i)-Z}{E(R_M)-Z}$。当 Z 为无风险利率 R_f 时，就是 CAPM 中的证券市场线，由于市场组合是有效的，单只股票的 β 系数与收益率之间存在简单的线性关系。

三、结语

以上从数学角度对投资组合理论进行了浅析，由此进一步可推出 CAPM、因素模型等理论，因而投资组合理论被称为现代投资理论的基石，投资组合理论提供了分析和解决问题的一条重要途径。但应该看到的是，其假设条件比较苛刻，近几十年来无数学者都在放松假定的方面进行研究。例如，如果市场不允许卖空，则有效组合未必有效，因为不允许卖空时，不同既定收益下最优组合包含的资产种类很可能是不同的，这意味着当我们把投资者持有的有效组合合并到一起时，加总的市场指数不再有效。再比如，马可维茨证券组合投资模型并没有考虑证券组合投资过程中的交易费用，实际上，交易费用是投资管理中不可忽视的因素。在组合投资过程中，忽略交易费用会导致非有效的证券组合投资决策。

综上所述，西方证券投资理论还在不断更新与发展中，我国在引进其先进理念的同时也要注意创新以及结合本土市场进行研究。尤其是在我国目前市场摩擦较大、投资者比较盲目、市场约束较大、信息传递效率较低的情况下，更需要进行深入研究。

主要参考文献

1. 万伦来.西方证券投资组合理论的发展趋势综述.安徽大学学报：哲学社会科学版，2005；1

2. 刘国志，何晓斌.二次规划的广义逆矩阵方法.抚顺石油学院学报，1996；2

3. 豪根著.郑振龙等译.现代投资理论.北京：北京大学出版社，2005

4. 胡国政，李楚霖.考虑交易费用的证券组合投资的研究.预测，1998；5