均值—方差模型在个人理财中的应用及优化

杨利红　徐　凡

（西安科技大学管理学院　西安　710054）

【摘要】本文简要论述了均值—方差模型及最优投资组合，并在此基础上引入交易成本及无风险资产因素对 Markowitz 均值—方差模型进行优化，使得经典的均值—方差模型更具适用性。

【关键词】均值—方差模型　交易成本　无风险资产　优化

一、均值—方差模型概述

1952 年 Markowitz 的《资产选择：投资的有效分散化》一文的发表，标志着现代投资组合理论的诞生。Markowitz 提出用均值衡量投资组合的收益，用方差衡量投资组合的风险，并据此建立了一套用于分析和选择最优投资组合的数学方法和模型。Markowitz 的投资组合理论极大地促进了现代理财学的发展，在个人理财规划中具有重要的现实意义。

1. 均值—方差模型的预期收益和风险。投资者投资时，为了选取合适的投资组合，就需要对预期收益和风险进行估计。Markowitz 的投资组合理论对投资组合的预期收益和风险进行了定量分析，即用收益的均值度量预期收益，用标准差度量风险。

投资者总希望获得尽可能多的预期收益，但他们同时也需要考虑风险。作为风险测度因子的标准差，是实际收益相对于投资的预期收益的离散程度。投资组合的方差不仅与基本投资工具的方差有关，同时也与基本投资工具之间的相关程度有关，因此还需要考虑基本投资工具的协方差。协方差用于测度两个投资工具的收益变动方向。如果协方差是正数，则两个投资工具的收益均大于预期收益，两者呈正向变化；如果协方差是负数，则两个投资工具的收益呈反向变化。

投资工具之间的相关程度对投资组合的标准差有很大影响，随着相关程度从完全正相关到完全负相关，投资组合的标准差随之降到最低。当投资者选定了几种投资工具组成投资组合时，投资工具间的两两相关程度就已经确定，但由于每种投资工具的投资额占投资总额的比重不同，这样就会有无穷多个投资组合。一般情况下，投资者可选择的投资组合有无穷多种，因此他们需要从中找出最优的投资组合。

2. 均值—方差模型的表达式及其有效边界。Markowitz 的均值—方差模型是建立在一系列严格的假设条件之上的，主要包括：证券市场是有效的、投资者是理性的、投资者是均衡考虑预期收益和风险的、证券市场不允许买空和卖空。

Markowitz 的投资组合理论的观点是：在收益达到一定

率、净利润率和主营收入增长率的解释能力都很强，这说明全要素生产率指数确实是衡量企业经营能力的一个重要指标。

四、结论

众所周知，自 1959 年潘罗斯的《企业增长理论》一书强调企业能力以来，企业能力理论已经与交易成本理论、企业演变理论和企业生态理论一起被誉为企业战略研究的四大主流理论。该理论假定企业具有由不同资源（包括知识、技术）形成的独特能力，这种能力具有稀缺性、异质性、不可模仿性、难以替代性等特质，企业独特的战略性资源又会形成企业技术竞争力，使企业能够长期获得租金。

与同质性假说的新古典企业理论相比，基于异质性假说的企业能力理论更符合实际。本文的研究结果表明：可以利用全要素生产率指数对企业之间的内部经营效率进行比较分析，全要素生产率指数是企业盈利能力和发展能力的主要反映指标。

【注】本文受国家自然科学基金（编号：10671144）与浙江工商大学研究生科技创新项目（编号：1020XJ1508035）资助。

主要参考文献

1. Solow, Robert. Technical change and aggregate production function. The review of economics and statistics, 1957; 9

2. Stephen O´Byrne. EVA and market value. Journal of applied corporate finance, 1996; 9

3. Tobin. A general equilibrium approach to monetary theory. Journal of money, credit and banking, 1969; 1

4. 王锡秋，席酉民.企业能力缺陷研究.财经理论与实践，2002；6

5. 乔华，张双全.公司价值与经济附加值的相关性：中国上市公司的经验研究.世界经济，2001；1

6. 刘芍佳，丛树海.创值论及其对企业绩效的评估.经济研究，2002；7

7. 王喜刚等. 什么解释公司价值：EVA 还是会计指标.经济科学，2003；2

8. 颜鹏飞，王兵.技术效率、技术进步与生产率增长：基于 DEA 的实证分析.经济研究，2004；12

水平以及其他的约束条件下使投资组合的风险最小。用模型表示如下：

$$\begin{cases} \min\ \sigma^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \\ \text{s.t.}\ \ E(R)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i E(R) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1 \\ \omega_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

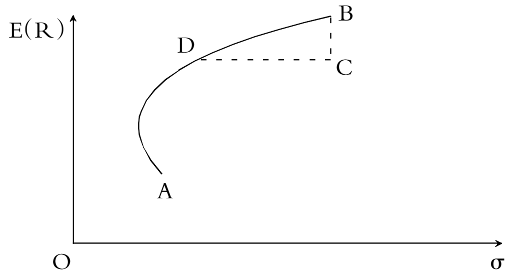

图 1　均值—方差模型的有效边界

图 1 是这些证券组合的可行集，横轴为标准差 σ，纵轴为预期收益 E(R)。投资者不需要评估可行集中的所有投资组合，只分析任意给定风险水平有最大的预期收益或任意给定预期收益有最小的风险的投资组合。满足这两个条件的投资组合集叫做 Markowitz 有效集（边界）。图 1 中就是曲线 AB 为有效集。投资组合 A 有最小的风险，B 有最大的预期收益。可行集中的任何投资组合都可以用比它好的有效集上的投资组合替代。比如，投资组合 C 可以用投资组合 B 代替，因为在相同风险水平下，B 的预期收益比 C 大；同时可以用 D 代替 C，因为在相同预期收益水平下，D 的风险比 C 的风险小。

二、均值—方差模型的最优投资组合选择

确定投资组合的有效集以后，投资者就可以从这个有效集中选出适合自己的投资组合。为了了解不同投资者在有效集上所做出的进一步选择，我们必须结合其效用的无差异曲线来进行分析。不同类型投资者的无差异曲线与一定风险度相适应的任一投资收益都能给投资者带来一定的效用。一般而言，收益越高，效用越大；风险越大，效用越小。根据收益与风险对称的原理，较小的预期收益对应着较小的风险，而较大的预期收益往往伴随着较大的风险。对于任一投资者而言，其总是能够找出为其带来相同满足程度，但具有不同收益与风险的投资组合。将这些组合描绘在横轴表示方差、纵轴表示预期收益的平面上，就得到如图 2 所示的无差异曲线：

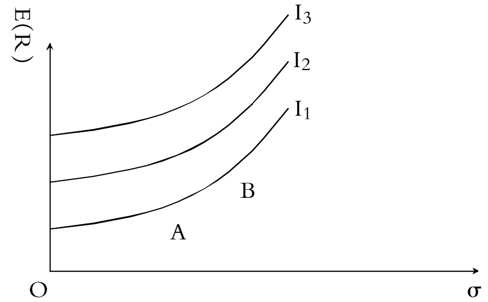

图 2　无差异曲线的基本形态

图 2 中，曲线 I_1 上的任一点都给投资者带来相同的效用。如该线上的 A、B 两点，虽然 B 点的收益较 A 点大，但由于其风险也较大，所以它给投资者带来的满足程度与 A 点没有什么不同，所以它们同处一条无差异曲线。但曲线 I_2 与 I_3 都高于 I_1 曲线，所以它们的效用都大于曲线 I_1 上投资策略所带来的效用。

由以上分析可知：①无差异曲线不是单独的一条，而是一束；②对于同一投资者而言，同一平面上的两条无差异曲线不可能相交。

结合图 1、图 2，我们可以得到投资者的最优选择如图 3 所示：

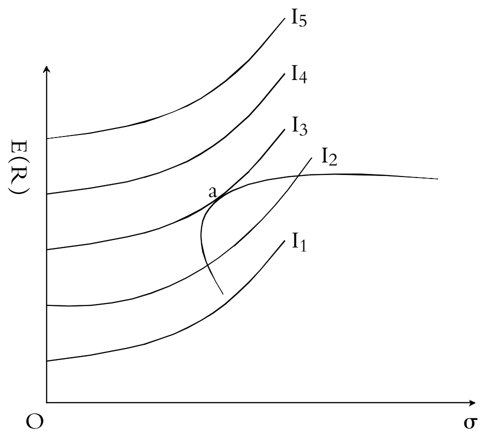

图 3　最优投资组合的选择

图 3 中，投资者的无差异曲线 I_5 位置最高，但由于其离开了有效边界，就表明不存在能给投资者带来这样的满足程度的投资选择。而无差异曲线 I_1 与 I_2 都与有效边界相交，其交点即为可行的投资选择，但都不是最优的选择，因为存在着效用更大且可行的投资选择 a，a 点就是我们所寻找的最优投资选择。

三、均值—方差模型的优化研究

Markowitz 均值—方差模型假设使得其在我国个人理财市场的应用上存在一定的局限性：①风险度量方面的缺陷。经典的 Markowitz 模型只能接受方差作为风险度量因子，而方差并不是最符合投资者心理和证券市场实际的风险度量因子。②交易费用问题。根据模型假设，模型中并不考虑交易费用的存在，而实际上不同投资工具的交易费用将直接影响到投资者的决策，完全不考虑是不切实际的。③最小交易数量的限制，经典的 Markowitz 模型认为资产是无限可分的，而实际情况中不同的交易品种都会有最小交易数量的限制，这同样对投资者的投资行为带来影响。

因而，如何将经典的均值—方差模型进行改进和优化，使其更符合我国个人理财市场的特点，便成为学者们需要解决的难题。尽管学者们已经从投资学的角度对均值—方差模型进行了多方面的优化和改进，但是均值—方差模型在我国个人理财市场上的应用才刚刚起步。目前，我国学者只是简单地将 Markowitz 均值—方差模型应用到个人理财领域中，并未对其进行优化和改进，以更好地适应我国个人理财市场的实

际情况。因此，为了进一步增强均值—方差模型在我国个人理财领域的适用性，本文基于投资学领域中已有的模型优化的研究成果，引入交易成本和无风险资产两个要素对 Markowitz 均值—方差模型进行优化。

1. 引入交易成本来优化模型。现实生活中个人理财者在委托买卖证券时应支付各种费用和税金，这些费用按收取机构可分为证券商费用、交易场所费用和国家税收。就普通个人理财者而言，其投入理财的资金较少，所以更要考虑交易成本的存在。

假设只要有交易发生，无论是买入还是卖出，必须支付交易额 α 倍的交易成本，设 W_{i0} 是第 i 种证券在 t_0 时刻的价格，W_{i1} 是第 i 种证券在 t_1 时刻的价格。因此，假设在 t_0 时刻买入一单位证券 i，其需资金为 $W_{i0}+\alpha W_{i0}$。同理，若在 t_1 时刻卖出这一单位证券 i，可获得资金 $W_{i1}-\alpha W_{i1}$，则在时刻 t_0 到 t_1 这段时间，考虑交易成本的投资收益率为：

$$R_i'=[(W_{i1}-\alpha W_{i1})-(W_{i0}+\alpha W_{i0})]/(W_{i0}+\alpha W_{i0}) \quad (1)$$

假定：

$$R_i=(W_{i1}-W_{i0})/W_{i0} \quad (2)$$

即 R_i 为证券 i 的市场价格收益率(即无交易成本所获得的投资收益率)。将公式(2)代入公式(1)中，可得考虑交易成本的投资收益率为：

$$R_i'=[(1-\alpha)/(1+\alpha)]R_i-2\alpha/(1+\alpha) \quad (3)$$

$$E(R_p')=\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(R_i')=[(1-\alpha)/(1+\alpha)]\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(R_i)-2\alpha/(1+\alpha) \quad (4)$$

考虑交易成本的投资组合最优化模型为：

$$\begin{cases} \min\ \sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \\ \text{s.t.}\ \ E(R_p')=[(1-\alpha)/(1+\alpha)]\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(R_i)-2\alpha/(1+\alpha) \\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1 \\ \omega_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

则优化后的模型的有效边界如下图 4 所示：

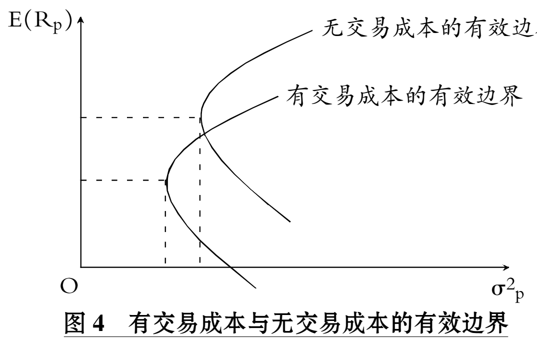

图 4 有交易成本与无交易成本的有效边界

可见，当考虑交易成本时，投资组合的有效边界向左下方移动，这就意味着个人理财者的投资策略发生了改变。

2. 引入无风险资产来优化模型。在现实市场上，还存在着许多无风险的投资品种，如储蓄、国债、寿险等。个人理财者总是希望合理地组合有风险资产和无风险资产，分散风险，以达到最佳的组合。下面就讨论如何引入无风险资产改进均值—方差模型，使个人理财者根据自身风险承受能力，以无风险资产投资比例来调节投资组合的风险和收益。

假设投资者购买的投资组合由 n 个风险资产和 1 个无风险资产组成。无风险资产即为具备确定的预期收益和方差为零的资产。每一个时期的无风险利率等于它的预期值，因为：

$$Cov(R_F,R_i)=E[R_F-E(R_F)][R_i-E(R_i)]=0$$

而 $R_F=E(R_F)$，即无风险资产和任何风险资产 i 的协方差均为零，故无风险资产与风险资产不相关。

当存在无风险资产时，设无风险资产的收益率为 R_F，ω_F 为无风险资产的权重。考虑交易成本且引入无风险资产的投资组合的期望收益为：

$$\begin{aligned} E(R_p'')&=\omega_FE(R_F)+(1-\omega_F)E(R_p') \\ &=\omega_FE(R_F)+(1-\omega_F)\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(R_i') \\ &=\omega_FE(R_F)+[(1-\omega_F)(1-\alpha)]/(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(R_i) \\ &\quad -2\alpha(1-\omega_F)/(1+\alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

考虑交易成本且引入无风险资产的投资组合最优化模型为：

$$\begin{cases} \min\ \sigma_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \\ \text{s.t.}\ \ E(R_p'')=\omega_FE(R_F)+[(1-\omega_F)(1-\alpha)]/(1+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\omega_i \\ E(R_i)-2\alpha(1-\omega_F)/(1+\alpha) \\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1 \\ \omega_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

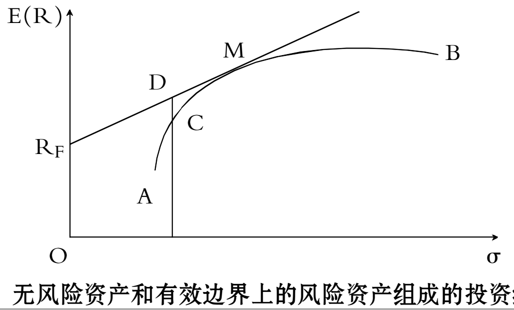

图 5 无风险资产和有效边界上的风险资产组成的投资组合

图 5 中曲线 AB 是投资组合 p′ 的有效集，无风险资产 F 在纵轴上，因为它的风险是零。从点 R_F 做曲线 AB 的切线，切点为 M。此时直线 R_FM 上的任何点都是投资 p′ 与无风险资产 F 组成的投资组合，而且有效集 AB 上除 M 点外不再是有效的，比如投资组合 C 在 AB 上，可以在 R_FM 上找到投资组合 D 比 C 更有效。同样，C 和 F 组成的投资组合总能在直线 R_FM 上找到比它更有效的投资组合。

主要参考文献

1. 戴晓凤，晏艳阳.现代投资学——组合投资分析与管理.长沙：湖南人民出版社，2002

2. 杨海明，王燕.投资学.上海：上海人民出版社，2000

3. 林功实.个人投资理财.北京：清华大学出版社，2003

4. 陈登峰，符静波.生命周期理论在个人理财中的运用.集团经济研究，2007；6