

# 基于 CVaR 的中小企业 信用担保项目组合风险优化

宋冬梅

(盐城工学院 江苏盐城 224002)

**【摘要】** 本文以中小企业信用担保项目组合的 CVaR 最小为目标函数,以项目组合的 VaR 约束为条件,建立了信用担保项目组合风险优化模型,此模型可以降低信用担保机构发生灾难性风险的可能性,使组合风险限定在信用担保机构可以承受的范围之内。这有助于信用担保机构在有效控制风险的前提下提高担保资金的使用效率和担保项目质量。

**【关键词】** 中小企业 信用担保 项目组合风险 CVaR

中小企业信用担保是指专门为中小企业提供融资担保和履约担保服务的活动。在信用担保过程中,担保机构、银行、被担保中小企业为三个子系统,共同形成一个大系统,存在于社会经济环境中。中小企业信用担保风险是信用担保机构在实际担保业务运作过程中,由于各种不确定性因素(主观和客观)的影响而遭受损失的可能性。信用担保机构面临着巨大的风险,必须要建立风险评价和控制机制;否则,随着担保放大倍数的增大,信用担保风险就会逐渐增大,这样不但会拖垮担保机构,而且还会拖累协作银行。因此,通过对信用担保机构的单个担保项目的风险评价和控制,可以在一定程度上实现

对担保风险的管理和控制。单个项目的风险管理固然重要,但是担保机构的整体风险管理对“协作银行——中小企业信用担保机构——中小企业”三方交易信用链条来说也非常重要,从项目组合和机构总体层面对中小企业信用担保机构所面临的风险加以衡量与控制,对三方交易的顺利进行和中小企业信用担保机构的生存发展具有重要的意义。基于资产组合管理思想衡量资产组合和机构总体风险是现代风险管理的趋势。

## 一、中小企业信用担保项目组合风险管理理论分析

1. 运用资产组合理论管理中小企业信用担保项目风险的意义。现代资产组合理论在微观上研究的是投资者如何对

我国的离岸业务需求更加强烈。目前,离岸业务的境外客户对象集中在东南亚地区,在此区域的全球资金也非常充足,银行离岸业务有广阔的发展空间。

4. 高度重视离岸金融创新。部分金融创新有绕开金融管制的目的,其导致的信用风险、汇率风险等也随之加大。国际金融炒家正是利用期权、期货、掉期等金融衍生品借道离岸业务狙击泰铢,这应该引起我们的警惕。鉴于我国市场参与者的风险管理能力相对较弱,现阶段对金融创新业务的开展应当遵循“适度从严、逐步放开”的原则。监管机构应督促进行金融创新的金融机构不断加强和完善风险管理和内部控制,使风险管理和内控制度做到设计合理、更新及时,使相关制度有效衔接。同时,要督促各金融机构确保风险管理和内部控制制度的执行和落实,特别是一些关键控制环节要管理到位,防止出现重大风险和过失。另外,应该引导参与机构有序推进金融创新,实行发展与监管并重的金融创新发展战略,有序加快金融创新进程。

5. 加强离岸金融制度建设。明确发展离岸金融业务的监管原则,加大对离岸业务市场准入资格的审批力度;获准经营离岸业务的中资商业银行,其分支机构可允许开办离岸业务;扩大离岸业务服务对象范围,将离岸业务的服务对象由非居民适度扩大到在境外上市的境内企业、实施外汇资金集中营

运管理的跨国公司、劳务承包工程企业的境外办事机构;增加离岸账户“税务制度”内容,对我国商业银行经营离岸业务实行税收优惠并以国家层面的法规形式明确下来。

6. 推动我国商业银行开办离岸人民币业务。根据国务院的统一部署,上海市和广东省的广州、深圳、珠海和东莞四个城市作为全国首批试点地区,从 2009 年 7 月 7 日起正式启动跨境贸易人民币结算试点。目前,境外人民币运用渠道还比较少,投资收益吸引力不高,影响了境外企业、居民对使用人民币进行交易结算的认可和接受程度。人民币业务成为国际金融业务新品种,将为金融机构加快金融创新提供新途径。推动我国人民币离岸业务的发展,可以扩大商业银行离岸业务经营范围,促进离岸业务的发展,也可以拓宽境外人民币结算区域、提高人民币在对外经贸往来中的比重,为实体经济发展提供更加高效的金融服务。

## 主要参考文献

1. 陈彪如. 国际金融概论. 上海: 华东师范大学出版社, 1996
2. 巴蜀松. 离岸金融市场发展研究——国际趋势和中国路径. 北京: 北京大学出版社, 2008
3. 陈焕永. 亚太地区离岸金融市场管理的比较研究. 亚太经济, 1997; 5

多种风险资产进行选择 and 组合,以有效降低投资风险、实现财富效用的最大化。资产组合管理是指购入和持有资产的控制过程。考虑到增量资产对整体资产组合风险报酬的影响,各机构可以根据一定的标准控制其资产组合的构成。一旦在组合中添加了某一资产,即可运用资产组合风险度量工具确定不再符合风险收益偏好的资产。从信用担保风险的角度而言,运用资产组合理论进行分析考虑到了组合的分散效应,它可以帮助信用担保机构运用资产组合风险分散的方法和技术,不但可以考察信用担保项目组合的边际风险,而且可以在单个项目风险评价的基础上考虑各信用担保项目之间的相关性并将其引入评价模型。我们可以利用统计上的方差或标准差来衡量资产投资风险,以相关系数表示资产之间的相互关联关系,以协方差表示风险之间的相互关系,可以计算出信用担保项目组合风险的大小,同时结合信用担保额度来控制信用担保项目组合的集中风险,并根据信用担保项目组合的集中风险以及个体项目对项目组合的风险贡献来决定为不同项目提供担保的信用暴露程度,及时调整信用担保的方向。这也就是说,对信用担保项目组合的整体风险状况进行定量分析,在对整体风险有准确认识的基础上,根据目标约束条件,运用优化模型测算出拟新增每笔信用担保项目的风险对信用担保项目组合总体风险的影响,最终确定信用担保的方向。因此,现代资产组合理论及其方法和技术为度量信用担保机构的整体风险提供了科学的指导思想。

2. VaR 的风险度量原理。风险价值(VaR)是“处于风险中的价值”,指在市场正常波动下,某一金融资产或证券组合的最大可能损失。更为精确地说就是:在一定的概率水平(置信度)下,某一金融资产或证券组合在未来特定时期内的最大可能损失。用数学表达式表示为:

$$P(L > VaR) = 1 - \beta \quad (1)$$

其中:L 为投资组合在持有期  $\Delta t$  内的损失; $\beta$  为置信度;VaR 为置信度  $\beta$  下处于风险中的价值。本文 VaR 及收益或损失均取正数形式。

3. CVaR 的风险度量原理。条件风险价值(CVaR)是指在一定的置信度( $\beta$ )下,损失超过 VaR 的条件均值,反映了超额损失的平均水平。它较之于 VaR 更能体现投资组合的潜在风险,可用数学表达式表示如下:

$$CVaR = E(L | L \geq VaR) \quad (2)$$

VaR 反映了一定期间内的一定概率水平下的最大损失,但没有给出超过该概率水平下的损失,而 CVaR 恰好能解决这个问题。不仅如此, CVaR 还具有良好的数学特性,这首先反映在 CVaR 具有次可加性上,这意味着多样化投资可以有效降低风险;其次, CVaR 是投资组合头寸的凸函数,可以用凸规划完成计算,这大大简化了风险的控制与组合的优化;最后,虽然 VaR 给出了一个阈值,能以较大的概率保证损失不超过分位数,但无法考察超过分位点的下方风险,而 CVaR 给出了尾部的期望损失值。

设信用担保损失为  $L = -\mu_0$ ,若  $\mu_i (i=1, 2, \dots, n)$  服从正态分布,则  $\mu_0$  也服从正态分布,  $L$  也服从正态分布,那么  $L \sim N$

$(-\mu(X), \sigma(X)^2)$ 。设  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数,标准化后得:

$$\frac{L + \mu(X)}{\sigma(X)} \sim N(0, 1) \quad (3)$$

因为  $P(L \leq VaR) = \beta$ , 则:  $P\left[\frac{L + \mu(X)}{\sigma(X)} \leq \frac{VaR + \mu(X)}{\sigma(X)}\right] = \beta$ 。那么:

$$VaR = \Phi^{-1}(\beta)\sigma(X) - \mu(X) \quad (4)$$

由数理统计知识可得:

$$CVaR = \frac{\sigma(X)}{1 - \beta} \varphi[\Phi^{-1}(\beta)] - \mu(X)$$

$$\text{令: } T = \frac{\varphi[\Phi^{-1}(\beta)]}{1 - \beta}, \text{ 则:}$$

$$CVaR = T\sigma(X) - \mu(X) \quad (5)$$

## 二、基于 CVaR 的中小企业信用担保项目组合风险优化思路

1. 信用担保项目组合风险优化模型的建立。假设  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  表示随机的决策变量组合,其中  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  表示第  $i$  个担保项目占担保规模的比例,同时设  $\mu_i$  表示第  $i$  个担保项目在无信用迁移情况下的收益率。根据资产组合理论,信用担保项目组合的收益率  $\mu_0$  的期望值为:

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad (6)$$

设第  $i$  个信用担保项目和第  $j$  个信用担保项目的协方差为  $\sigma_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$ , 则信用担保项目组合的风险

为:  $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = X^T U X$ 。其中,  $U$  可以表示为:

$$U = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

VaR 约束表现为信用担保项目组合具有  $\beta$  的概率使其损失不超过 VaR。将 CVaR 最小作为信用担保项目组合优化的目标函数,以降低信用担保机构发生灾难性风险的可能性。

$$\text{Min CVaR} = T\sigma(X) - \mu(X)$$

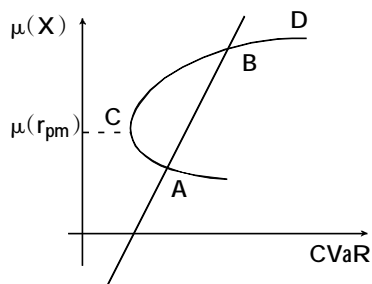
$$\text{则建立的模型为: st. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \mu(X) \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \Phi^{-1}(\beta)\sigma(X) - \mu(X) = VaR \\ 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (7)$$

2. VaR 约束的解释以及模型的调整。将式(4)和式(5)联立,可以得到 CVaR 和  $\mu(X)$  的关系式为:

$$\mu(X) = \frac{T}{\Phi^{-1}(\beta) - T} VaR + \frac{\Phi^{-1}(\beta)}{T - \Phi^{-1}(\beta)} CVaR$$

可以看出, VaR 约束在“CVaR -  $\mu(X)$ ”的空间表现为一条斜率为  $\frac{\Phi^{-1}(\beta)}{T - \Phi^{-1}(\beta)}$ 、截距为  $\frac{T}{\Phi^{-1}(\beta) - T} VaR$  的直线,在该直

线及其以上的全部信用担保项目组合的收益率在置信度β下不超过VaR。则模型(7)的解在空间“CVaR-μ(X)”中是有效边界在VaR约束直线上面的部分,具体如下图所示:



VaR 约束下的信用担保项目组合有效边界图

$$\begin{aligned} \text{MinCVaR} &= T\sigma(X) - \mu(X) \\ \text{则模型(7)变为: st.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \mu(X) \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ \phi^{-1}(\beta)\sigma(X) - \mu(X) \leq \text{VaR} \\ 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

模型(8)以信用担保项目组合的CVaR最小为目标函数,以投资组合的VaR为约束条件,得到项目最优的投资比例。这样做的优点在于:①反映了损失超过VaR时可能遭受的平均潜在损失,弥补了VaR不能反映损失尾部信息的缺陷,能防范信用担保机构的灾难性风险。②将VaR作为防范投资风险的第一道防线,用组合的VaR收益率最大损失来控制投资收益率的风险限额,直接反映了信用担保机构的风险承受能力。

3. 确定组合收益率的合理区间。根据资产组合理论,投资者总是希望在已知风险的条件下获得最大的期望收益,或在既定的期望收益下使投资风险最小。这样,不同收益及最小风险构成了有效前沿。组合收益率μ(X)应该在模型的有效前沿选取,可以得到最小的CVaR点(上图中的C点)对应的收益率μ(r<sub>pm</sub>)。

$$\mu(r_{pm}) = \frac{A}{C} + \sqrt{\left(\frac{T^2}{CT^2 - D} - \frac{1}{C}\right) \frac{D}{C}} \quad (9)$$

其中:A=I<sup>T</sup>U<sup>-1</sup>μ; C=I<sup>T</sup>U<sup>-1</sup>I; D=BC-A<sup>2</sup>。

由于组合收益率μ(X)小于或等于单个项目中最大的收益率Max{μ<sub>i</sub>},故组合收益的区间可确定为:

$$\mu(r_{pm}) \leq \mu(X) \leq \text{Max}\{\mu_i\} \quad (10)$$

在μ(r<sub>pm</sub>)和Max{μ<sub>i</sub>}之间连续取值,就可得到有效边界CD,如上图所示。

基于VaR约束的信用担保项目组合有效边界是上图有效边界与VaR约束直线上面部分的交集。根据CVaR-μ(X)有效前沿性质可知,如果MinCVaR组合存在,设其为m∈X,那么它就是“均值-方差”模型的有效前沿。“均值-方差”模型的有效前沿可以表示为:

$$\sigma^2 = m_{11}\mu^2(X) + 2m_{12}\mu(X) + m_{22} \quad (11)$$

$$(RU^{-1}RT)^{-1} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{由VaR约束: VaR} = \phi^{-1}(\beta)\sigma(X) - \mu(X) \quad (12)$$

有效边界在VaR约束直线上面的部分,解式(11)和(12),可以得到直线与有效边界的两个交点A、B。μ(X)<sub>A</sub><μ(r<sub>pm</sub>)<μ(X)<sub>B</sub>,所以组合收益率的合理区间为:

$$\mu(r_{pm}) \leq \mu(X) \leq \mu(X)_B$$

4. 担保规模比例分配。由式(10)还可以求得每一个μ(X)所对应的最优投资比例系数x<sub>i</sub>(i=1,2,⋯,n),这样我们就可以确定在每个项目上投放的金额。

### 三、实例分析

1. 数据收集。假设某信用担保机构的担保规模为1 000万元,分别对5个项目进行担保,各担保项目的收益率和协方差矩阵如表1所示。

给定VaR为0.45,β=95%,由于VaR服从正态分布,所以φ<sup>-1</sup>(β)=1.65。

表1 各项目的收益率及协方差矩阵

		项目1	项目2	项目3	项目4	项目5
协方差矩阵	项目1	0.20	0.05	-0.01	0.03	0.05
	项目2	0.05	0.3	0.015	0.01	0.03
	项目3	-0.01	0.015	0.1	0.02	0.01
	项目4	0.03	0.01	0.02	0.1	0.015
	项目5	0.05	0.03	0.01	0.015	0.15
预期收益率		0.2	0.14	0.12	0.05	0.07

2. 有效边界的确定。将表1中的常数阵代入式(9)、式(11),得:A=2.453 6; B=0.386 4; C=32.790 2; D=3.171 5; T=2.046。

将上述计算出的A、B、C、D、T的值代入,可算出最小CVaR点对应的期望收益率μ(r<sub>pm</sub>)=0.116 7。

同时,由表1可知,5个项目中最大的收益率:

$$\text{Max}\{R_i\} = \text{Max}\{0.2, 0.14, 0.12, 0.05, 0.07\} = 0.2$$

故有效边界上μ(X)的变化范围为:

$$0.116 7 \leq \mu(X) \leq 0.2$$

3. VaR约束下的有效边界。VaR的约束为:VaR ≥ φ<sup>-1</sup>(β)σ(X) - μ(X)。

代入数据得:0.45 ≥ 1.65σ(X) - μ(X)。

可以求解得到:μ(X)<sub>A</sub>=0.019 2; μ(X)<sub>B</sub>=0.187 0。则在VaR约束下有效边界的变动范围为:0.116 7 ≤ μ(X) ≤ 0.187 0。

4. 信用担保项目组合风险优化模型的建立。将“1-β=0.05”代入模型(8)中,得:

$$\begin{aligned} \text{MinCVaR} &= 2.046 \sqrt{X^T U X} - \mu(X) \\ \text{st.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^5 x_i \mu_i = \mu(X) \\ \sum_{i=1}^5 x_i = 1 \\ 1.65 \sqrt{X^T U X} - \mu(X) \leq 0.45 \\ 0 \leq x_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, 5) \end{cases} \end{aligned}$$

5. 在既定的收益率下确定信用担保项目的最优投资比例。利用Matlab软件编写程序求解各个信用担保项目的分配比例,结果如表2所示。同时求解出对应信用担保项目组合的CVaR。

表2 优化结果

$\mu(X)$	0.116 7	0.14	0.16	0.17	0.187
$\sigma^2(X)$	0.058 7	0.065	0.07	0.087 5	0.140 2
$x_1$	0	0.25	0.5	0.625 0	0.837 5
$x_2$	0	0	0	0	0
$x_3$	0.641 0	0.75	0.5	0.375 0	0.162 5
$x_4$	0.102 6	0	0	0	0
$x_5$	0.256 4	0	0	0	0
CVaR	0.379	0.381 6	0.381 3	0.435 2	0.585 8

6. 优化结果分析。在组合收益率区间 $0.116 7 \leq \mu(X) \leq 0.187 0$ 内给定 $\mu(X)$ ,即可算得相应的信用担保项目组合风险,并由模型(8)可以解出各信用担保项目所占的比重。

#### 四、结论

第一,根据资产组合理论,信用担保机构整体风险具有分散化效应,担保机构的在险价值要远远小于其担保项目组合中各担保项目在险价值的累加。换句话说,担保机构的损失输出结果的变化程度要小于其中各担保项目损失变化程度的累加。这就决定了信用担保机构必须遵循“风险分散”原则来开展担保业务,对信用担保项目组合的信用质量、流动性、多样化、单一风险、期限管理等应当有明确的规定和限制。我们可以根据每笔担保情况,计算担保的平均持续期限,使担保项目组合的平均持续期限与担保的平均期限相匹配;根据每笔净担保业务量对应的信用风险转换系数计算加权净担保风险;根据加权净担保风险增加净资本的数量,使担保风险与净资产保持在合适的水平;可以通过对担保项目组合指标的分析,例如客户集中度(担保机构的在保项目中某个行业的担保余额占总担保余额的比例)、行业集中度(担保机构前几家最大客户的担保余额占总担保余额的比例)等,了解担保机构的经营管理水平以及对业务风险的认识程度和管理能力。

第二,本文模型以VaR为约束条件,排除了风险相对较高的担保组合,有效地控制了组合风险;以项目组合的CVaR最小为目标函数,降低了担保机构发生灾难性风险的可能性,可能实现组合风险的优化,能够提高担保机构的资本利用率和风险收益率。这样使信用担保机构的风险水平具备数学含义,使中小企业信用担保机构的风险管理更具客观性和科学性。中小企业信用担保机构确定担保项目组合的资本分配,从而能考虑担保项目组合风险的分散效应,更为恰当地度量和管理风险,有助于中小企业信用担保机构在有效控制风险的前提下提高担保资金的使用效率和担保项目质量。通过信用担保项目组合风险分析,还可以计算出反映组合风险的关键比率,这些比率为理解担保机构的风险构成提供了非常重要的线索,主要包括:①信用质量比率,等于信用担保项目组合的预期损失与净风险暴露之比,反映了由组合中各担保项目信用级别、期限、领域分布等决定的平均信用质量。该比率越小,表明信用担保项目组合质量越好。②组合多样化比率,等于最大可能损失与预期损失之比,反映了组合的风险程度。这个比例越小,说明风险越分散。

第三,根据本文模型绘出VaR约束下的信用担保项目组合有效边界图及确立了组合收益率的合理区间,可以帮助信用担保机构直观地分析各种项目组合的风险和收益,适时观察风险与收益的变化趋势,找到在组合风险最小情况下的预期收益,这样担保机构可以根据有效边界和自身的需要调整各种担保项目所占的比重,从而提高担保机构决策的科学性。从表2可以看出:随着 $\mu(X)$ 的增大, CVaR迅速增大,由0.379上升到0.585 8。这反映出期望收益越大,风险越大。这也表明信用担保机构在经营过程中要遵循风险收益权衡的原则。在进行项目担保决策时,不仅要看到收益,而且也要时刻关注风险,权衡得失利弊后再做出决策。

第四,模型中的VaR和CVaR都是建立在信用担保损失服从正态分布的基础上,但有时信用担保损失往往不服从正态分布。因此,在实际信用担保项目组合风险研究中,首先要估计代偿损失的分布。我们可以对单个担保项目风险损失进行分析,计算出预期损失;然后再进行担保项目组合风险分析,确定担保项目组合损失的波动情况,绘制成图,找到符合信用担保损失的函数分布。

第五,本文模型是建立在担保项目无信用迁移的假设之上的。但是,在实际中申请担保项目的中小企业的信用等级可能会发生迁移。宏观经济状况、地区和行业差异等都会对中小企业信用等级产生影响。例如经济高涨时期,中小企业经营状况转好,利润上升,信用评级大多呈向上迁移趋势,经济低迷时期的形势则恰恰相反。同时,本文模型对信用担保标的当前价值和未来价值也未涉及,以后应加强对这方面的研究。

【注】本文系盐城工学院人文社会科学研究项目“我国中小企业信用担保风险研究”(项目编号: XKY2009103)的研究成果。

#### 主要参考文献

1. Markowitz H.. Portfolio Selection. Journal of Finance, 1952;7
2. J. P. Morgan. Risk Metrics - Technical Document (4thed.). New York: Morgan Guaranty Trust Company, 1996
3. R. Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. Journal of Banking & Finance, 2002;26
4. Rockafellar R. T., Uryasev S.. Optimization of conditional value-at-risk. Journal of Risk, 2000;2
5. 迟国泰,姜大治.基于VaR收益率约束的贷款组合优化决策模型.中国管理科学,2002;6
6. 姚京,李仲飞.基于VaR的金融资产配置模型.中国管理科学,2004;12
7. 林旭东,巩前锦.正态条件下均值-CVaR有效前沿的研究.管理科学,2004;3
8. 张树德.金融计算教程——MATLAB金融工具箱的应用.北京:清华大学出版社,2008
9. 石晓军.商业银行信用风险管理研究——模型与实证.北京:人民邮电出版社,2007